PERSPECTIVES PHILOSOPHIQUES SUR LA PREUVE EN MATHEMATIQUES

(Texte traduit de l'anglais par Olivia Chevalier ; revu et corrigé par l'auteur)

La preuve et le débat de l'*a priori*

Il semble naturel de croire que la logique nous fournit une connaissance *a priori*. Si je sais que X est logiquement valide, je sais alors que n'importe quelle occurrence de X est vraie empiriquement, et ce avant même d'obtenir une quelconque information provenant de l'extérieur. Si je sais empiriquement que P et logiquement que $P \rightarrow Q$, la règle de détachement m'autorise à affirmer Q (empiriquement). Dans un tel cas, il semble que j'acquiers la connaissance empirique de Q à l'aide d'une certaine connaissance *a priori*.

Carnap formula les principes essentiels de l'empirisme logique en de tels termes: on reste fidèle à une épistémologie kantienne, mais en ôtant la strate intuitive de l'*a priori*, tout en conservant la strate logique (même si l'interprétation théorique de l'*a priori* change, afin de traduire l'avancée frégéenne de la logique). Joëlle Proust a fait valoir ce point dans *Questions de forme*.

Il n'est pas aisé de déterminer ce qu'était la position de Frege sur cette question de l'*a priori*, à la fois parce qu'il écrit et pense dans un contexte historique dominé par le langage et le cadre kantiens – mais qu'il soit affecté par un tel contexte ne signifie pas qu'il soit en accord avec lui – et, plus profondément, parce qu'il semble attiré par les conceptions platonicienne et empiriste. Cependant, on peut dire, du moins me semble-t-il, que son rejet militant du psychologisme, ainsi que sa défense de l'objectivité de la logique, favorisent la conception de la connaissance logique comme *a priori*, par rapport à toute autre conception.

Bien sûr, on peut également entendre, du côté de la tradition analytique, une autre voix, combattant l'absolutisme logique. Je prendrai l'exemple de Goodman, lequel soulève explicitement la question de la preuve, l'objet de notre colloque.

Pour nous situer relativement au problème de l'induction, au début de la conférence « La nouvelle énigme de l'induction »[1], il cite et résume la conception de Hume, et se demande si un tel abîme absolu entre induction et déduction existe vraiment : cette dernière nous permettrait d'appliquer des schémas universels avec une entière certitude, tandis qu'en exécutant la première nous n'introduirions l'universalité qu'à titre d'hypothèse fragile. Il soutient qu'il n'en va pas ainsi, arguant que dans le cas de la déduction nous avons également affaire à un manque d'effectivité ou à une souplesse des règles et de leurs applications. Goodman affirme que nous formulons des règles d'inférence et que nous les appliquons à des cas particuliers, considérant comme justifiées les inférences accomplies conformément aux règles. Mais, par ailleurs, nous pensons que les règles d'inférence correctes sont celles qui fondent les inférences dont nous savons déjà qu'elles sont bonnes. Si ceci est vrai, il y a un cercle : nous comptons

[1]. Qui se trouve dans la partie intitulée *Project* de son célèbre ouvrage *Fait, Fiction, Prédiction* (*Fact, Fiction, Forecast*).

sur des règles pour évaluer les inférences, et sur les inférences pour évaluer les règles. Cependant Goodman prétend que le cercle n'est pas vicieux : nous accordons toujours déjà du crédit à certaines inférences et à certaines règles, et nous corrigeons les unes et les autres par un ajustement mutuel : nous rejetons une inférence si elle est exclue par des règles que nous jugeons impossibles à éliminer, nous éliminons une règle si elle interdit une inférence que nous considérons comme au-delà de toute critique.

Une telle explication, cela vaut la peine d'être remarqué, diffère de peu de celle donnée par Heidegger au § 32 ou 63 d'*Etre et temps*, lorsqu'il tente de nous convaincre que le cercle herméneutique n'est en rien vicieux. Il est curieux de rencontrer l'évocation d'un tel cercle dans la description, par un philosophe analytique, de ce qui est ni plus ni moins que l'empreinte gravée dans le marbre du raisonnement logique : les lois de la déduction, les principes de la preuve. Est-ce vraiment possible, cela a-t-il vraiment du sens de concéder de cette manière ce qui semble être la relativisation des règles de la preuve, et pour cette raison, de la preuve elle-même ?

D'un point de vue historique, on pourrait objecter que les lois de la preuve, qu'il s'agisse du système de Hilbert-Ackermann ou bien celui de la déduction naturelle de Gentzen-Prawitz, ne furent pas révélées, au commencement, au Sinaï. Je peux même citer l'exemple, non dénué d'importance, de Tarski, anciennement Teitelbaum, lequel, dans son article de 1935 « Uber den Begriff der logischen Folgerung », argumente en faveur de ce que nous appelons aujourd'hui son concept de la conséquence logique sémantique[2]. Dans cet article, Tarski n'expose pas sa notion de conséquence logique comme un point de vue sur la preuve parmi d'autres, mais comme étant potentiellement le seul véritable en face du concept syntaxique émergeant des travaux de Hilbert. Il invoque l'inférence de la donné infinie $P(0), P(1), ..., P(n), \ldots$, [une assertion pour chaque entier naturel] à l'assertion $\forall k\ P(k)$, le domaine de la variable k étant compris comme l'ensemble des entiers naturels. L'assertion finale est absolument certaine, dit-il, mais le dispositif fini hilbertien interdit ce que nous appelons aujourd'hui la ω-règle. Par conséquent, nous devrions substituer à ce dispositif le dispositif sémantique qu'il a à l'esprit et qu'il expose. Il est évident que Tarski se comporte dans cet article comme si les lois de la preuve n'étaient rien d'autre que le produit toujours révisable d'un genre particulier d'herméneutique, naissant de l'ajustement mutuel des règles et des inférences, tel que Goodman le formulait.

Ce type de conception de la logique et des règles de la preuve a une certaine postérité dans le mouvement analytique. Après tout, Quine, dans son célèbre article « Les deux dogmes de l'empirisme », rejette toute frontière nette et définie entre les jugements analytiques et synthétiques, défendant une image de la connaissance rationnelle où celle-ci apparaît comme faite d'un ensemble considérable de phrases solidaires, et manifestant une organisation hiérarchique : les lois logiques prennent place au centre, les assertions mathématiques dans le premier cercle, les vérités physiques admises dans le second, les phrases empiriques constituant l'extérieur de la structure. Tout, ici, est censé être sujet à révision, et le marin de Neurath peut modifier ce que bon lui semble pour continuer à naviguer, même les lois logiques. Parfois, les expériences des fentes de Young en mécanique quantique sont considérées comme présentant un exemple d'une telle révision, imposées par les données empiriques (et menant à l'élimination de la loi de distributivité pour le calcul propositionnel). Certains débats sophistiqués de ce type en viennent même à considérer le principe de contradiction comme objet de révision (seule l'action libre de la règle inconsistante $P \wedge (\neg P) \vdash Q$ – pour n'importe quel Q – doit être évitée, au nom d'un principe *a priori*).

[2]. L'article est publié dans les actes du premier grand colloque du Cercle de Vienne à Paris.

On pourrait penser que ces positions empiristes extrêmes sont quelque peu malhonnêtes. Il n'est pas clair que qui que ce soit, en quelque circonstance que ce soit, ait jamais renoncé véritablement à la logique traditionnelle du premier ordre. Est-ce que le physicien pense vraiment de manière universelle suivant une formulation de la logique quantique ? Plus probablement, s'il le fait, ce sera vis-à-vis d'un certain type de situations ontologiques ou expérimentales. Sommes-nous d'ailleurs obligés de formuler ontologiquement ce qui se passe dans les expériences des fentes de Young ? Est-ce que la « logique quantique » est quelque chose de plus qu'une interprétation ?

L'idée qu'il n'existe pas de cadre *a priori*, de quelque type que ce soit, même logique, est revendiquée comme une thèse empiriste, mais en fait il s'agit du désaveu de la rationalité, car le concept de rationalité ne fait rien d'autre que référer à un tel ensemble de modèles *a priori*. Nous n'appelons pas *rationnelle* n'importe quelle connaissance qui semble être induite par un puissant uppercut du l'immense boxeur qu'est le monde, et la différence qualifiante ne consiste peut-être pas en autre chose qu'en de tels modèles.

Gravissons une étape, et demandons-nous si la question philosophique de l'*a priori* doit être résolue *a posteriori* ou *a priori*. Même si on dit que l'on doit répondre en apportant une preuve *a posteriori* (de type épistémologique, telle l'expérience de Young), cette réponse semble jouir d'une certitude *a priori*. Les empiristes radicaux connaissent *a priori* le caractère inévitable de l'*a posteriori*. Très simplement, les formulations philosophiques de l'empirisme se présentent souvent sous forme d'arguments transcendantaux : par exemple, lorsque Searle, voulant réfuter Putnam, insiste sur le fait qu'il est un *réaliste externe*, et lorsqu'il prétend que le concept de la vérité objective *requiert* que quelque réalité extérieure délivre son message, il argumente en termes de ce que nous entendons *déjà* par vérité objective, et ne pouvons entendre autrement, ce qui correspond précisément à la forme générale des arguments transcendantaux.

Dernier point : la connaissance doit être véhiculée par le langage, nous ne serions pas prêts à appeler connaissance scientifique quelque chose qui n'apparaîtrait pas sous forme de phrases et de textes (c'est un autre point transcendantal, mais, selon moi, il est généralement admis dans la tradition analytique). De plus, un langage dans les termes duquel nos vérités scientifiques sont consignées doit être un langage que nous soyons capables de parler. Cela oblige le langage de la science à non seulement suivre une logique, mais à suivre une logique que les humains peuvent assumer. Et cette simple et unique contrainte du langage apporte déjà un certain cadre *a priori*.

Il est fort probable que ces problèmes généraux concernant l'empirisme radical méritent une discussion à part, qui pourrait faire l'objet d'un autre (et assez important) article. Mais je vais maintenant les oublier, en tenant pour acquis le fait qu'il y a une connaissance *a priori* inhérente à la logique, et que notre appareillage théorique destiné à la logique identifie correctement, d'une manière ou d'une autre, un tel niveau *a priori*. Je me contenterai de défendre l'idée que nous ne pouvons nous empêcher de reconnaître, derrière ou sous cet *a priori* logique, un autre *a priori*, intuitif, corrélatif du premier : si j'ai raison, alors Carnap a échoué en rejetant la doctrine kantienne désignant l'espace et le temps comme intuitions pures, quelque chose du même genre est déjà compris par la logique, de telle sorte que l'*a priori* doit encore être reconnu comme biface, même pour quelqu'un qui n'est plus prêt à accepter l'argument épistémologique kantien à propos de la physique newtonienne. Ce sera la tâche de ma première partie. Ensuite, dans la seconde, je tenterai de défendre, à l'aide de développements contemporains, la conception kantienne de la spécificité des preuves mathématiques. Pour cela, je décrirai les preuves logiques – telles qu'elles sont comprises de nos jours par la théorie de la preuve – comme étant « mathématiques » au sens de Kant.

L'intuition constructive « derrière » la preuve

Preuve, intuition, évidence

Il est certain que c'est Frege qui nous donna la maîtrise logique du « discours sur les multiplicités », lorsqu'il mit en avant la quantification comme opérateur, pour proposer une manière d'analyser la langage en terme de quantification : résumons ce point en disant qu'il a inauguré ce qu'on appelle la logique du premier ordre. Mais il fit cela, dans sa célèbre *BegriffsSchrift*, tout en élaborant un medium formel au moyen duquel exprimer les énoncés logiques et écrire les preuves. Et Frege ne fut pas moins influent en adoptant cette attitude formelle qu'en clarifiant le rôle de la quantification. Nous regardons depuis comme impossible de traiter de la logique en dehors d'un certain type particulier de textualité : la logique « vraie » se présente sous un aspect formalisé, et doit être énoncée dans une certaine langue spécifique. Les *termes* incarnent les *noms*, les *formules* correspondent aux *phrases*, les *preuves formelles* jouent le rôle de *textes*. Tout l'arrière-plan technique de la logique pour la philosophie analytique n'est pas censé être une logique du sens commun, comme c'est le cas par exemple pour l'école nominaliste au Moyen-âge, mais plutôt la logique formalisée contemporaine.

Exposons ce que fut l'évolution générale après que la logique fut devenue formelle. On voit assez clairement qu'un des aspects de cette évolution est la définition et l'étude d'un nombre important de logiques « non standard ». Les logiciens introduisirent la logique intuitionniste, la logique libre, la logique du second ordre, la logique modale, la logique quantique, la logique paraconsistante, et ainsi de suite. Pour chacune de ces logiques, qu'on pourrait qualifier d'alternatives, ils eurent à définir un système d'inférence, une sémantique, et à se demander s'il était possible de démontrer un résultat d'incomplétude, comme ce fut le cas pour la logique des prédicats du premier ordre. Plus généralement, pour chaque logique particulière, ils essayèrent de vérifier la validité de certains résultats clefs, certains d'ordre sémantique, d'autres de type syntaxique.

Ce travail, qui continue d'être à la fois prolifique et fructueux depuis plus d'un siècle, aboutit à un impressionnant ensemble imaginatif d'expériences logiques : chaque principe logique particulier se trouva relativisé dans le cadre d'une de ces expériences au moins (tels l'involutivité de $\neg$ dans la logique intuitionniste ou le principe de non-contradiction dans la logique paraconsistante).

Après un siècle d'études logiques il apparaît, de manière assez frappante, que ce sur quoi les hommes s'accordent avec la plus grande certitude n'est pas une quelconque loi logique – pas même le principe de contradiction – mais plutôt le constat intuitif fini que quelque chose est correctement dérivé dans le cadre d'un système d'inférence. Il existe des discussions au sujet de la puissance et des qualités des diverses logiques, et cette puissance et qualités sont jugées à l'aune de ce qu'on peut prouver dans chacune d'elles. Le concept général de « théorème » référé à un certain système d'inférence est le véritable universel de la recherche logique.

Mais ce concept n'est pas défini de manière logique. Il apparaît comme un cas spécial du concept de « classe constructive », introduit par la présentation des objets primitifs de la classe et des règles de construction[3]. Quelque chose est membre de la

[3]. Ou peut-être qu'il coïncide avec ce concept : on peut considérer toute classe constructive comme classe des théorèmes dérivés pour un système d'inférence correspondant.

classe s'il peut être construit sur la base des objets primitifs en utilisant les règles de construction. Nous pouvons montrer qu'il en est ainsi en présentant l'arbre de construction de l'objet, témoignant de son appartenance en référence aux règles.

Cela semble vouloir dire que notre accord le plus universel, contrairement à ce que pensaient les logiciens et sur quoi ils insistaient, repose sur une part intuitive : qu'un certain texte formel produise un arbre acceptable, et ainsi vaille comme preuve formelle, est quelque chose que nous ne pouvons que « voir », en nous appuyant sur une certaine connaissance spatiale *a priori* très limitée, impliquant les distinctions droite/gauche et haut/bas. Notre acte de recognition consiste à lier les signes concrets formant un tout à quelque schéma symbolique appartenant à l'espace affaibli auquel notre intuition se réfère : lorsque nous saisissons la structure de la preuve dans l'arbre, nous « voyons » ce schéma dans cet espace plutôt que les signes concrets dans l'espace euclidien.

Une telle assertion revient à ce que Brouwer objecta à Hilbert au commencement de l'aventure formaliste : on doit d'abord partager une conception intuitionniste des objets mathématiques afin d'être en mesure de jouer le jeu des formules et des preuves.

Cela peut paraître paradoxal, puisque la volonté philosophique d'assurer la rationalité en la fondant sur une nouvelle logique, conçue comme objective et libérant l'humanité de toute dépendance envers l'intuition, semble avoir conduit à une situation épistémologique dans laquelle tout est sous le contrôle d'une intuition minimale spécifique. En fin de compte, je crois que nous ne devrions en aucune façon considérer la situation comme paradoxale ni comme gênante, d'un point de vue rationnel : cela signifie seulement que l'*a priori* logique est à la fois discursif et intuitif, qu'il est constitué de deux niveaux, le discursif étant pour ainsi dire superposé à l'intuitif. Mais il se peut qu'il faille être suffisamment kantien pour accepter une telle circonstance : or, c'est justement ce que je demande à la philosophie de la logique contemporaine.

Sans tenter d'approfondir cette discussion, demandons-nous simplement : que pourrait-on objecter afin de refuser cette présentation ? Deux attitudes me viennent à l'esprit : la première consiste à soutenir que l'intuition constructive, telle que je viens de la décrire, ne régit pas tout, qu'elle ne détient pas la position clef ou de contrôle que je viens de lui prêter ; la seconde consiste à soutenir qu'il n'y a rien de véritablement intuitif dans cette intuition, qu'elle ne possède aucun des traits qui motivèrent le rejet frégéen, et plus largement analytique, de l'intuition.

Ces deux attitudes donnent naissance à quatre objections, la seconde étant envisageable de trois manières. Considérons maintenant chacune d'entre elles, en essayant d'abord de les exprimer au mieux.

L'intuition constructive ne régit pas tout

Formulons tout cela le plus simplement possible. Ce que nous allons dire dans cette objection est par exemple que, quelque système d'inférence formel que l'on puisse choisir pour la logique des prédicats, qu'il s'agisse d'un système de type hilbertien, d'un système de déduction naturelle ou d'un système de calcul des séquents, le concept de *correction des preuves* lié à l'adoption d'un tel système ne substitue pas son autorité à celle de la pure logique.

Par exemple, si je déduis $P[x/t]$ de $\forall x P(x)$, j'agis conformément à ma compréhension fondamentale de l'universalité et de l'instanciation, je n'obéis donc pas à une règle d'inférence sans signification. Je me fonde sur la remarque que la vérité de $\forall x P(x)$ "comprend" la vérité de toute instance de $P(x)$, et la règle d'inférence ne fait ainsi rien d'autre qu'exprimer une certaine « loi de l'être vrai ».

Le même commentaire est à faire concernant le *modus ponens* : lorsque j'infère Q de

$P \rightarrow Q$ et P, je n'obéis pas à une certaine forme – dérivée de la règle de coupure du calcul des séquents – mais je suis plutôt inspiré par la table de vérité de $P \rightarrow Q$, connue (parce que décidée) depuis les anciens (les stoïciens). Encore une fois, la règle est fondée sur certaines propriétés de la vérité.

Nous aurions raison sur ces deux points, d'une certaine manière.

Mais puis-je aller jusqu'à affirmer que la nécessité logique n'appartient aucunement au niveau de la correction formelle, en tant qu'intuitivement vérifiable ? Cela signifierait que la nécessité exprimée par les systèmes formels, le fait que certaines formules sont des théorèmes de ces systèmes, est d'une nature tout à fait différente de celle de la nécessité véhiculée par chaque axiome ou règle appartenant au seul système vrai. A mes yeux, une telle position est intenable.

1) Dans certains cas, la nécessité morphologique transmise par la règle formelle semble « dire la même chose » que la nécessité logique, comme dans le cas de la règle d'introduction du $\wedge$. En tout cas les règles formelles s'emparent du contenu logique, ce qui semble suggérer que le dispositif formel/morphologique n'est pas un moyen étranger et absurde par rapport à lui.

2) Plus radicalement, si on persiste à accorder à la logique des prédicats une valeur au-delà de la nécessité formelle inhérente à chaque système formel (y compris ceux destinés à la logique des prédicats), alors on doit reconnaître l'existence d'un niveau conceptuel, qui structure *a priori* la pensée indépendamment de tout ce que la logique contemporaine est en mesure de montrer et de prouver. La tâche de la philosophie consisterait à dégager ce noyau en le rendant explicite, à dire quels sont les principes logiques inévitables, ceux qui ne sont pas seulement intégrés à un dispositif formel/intuitif, mais liés à notre compréhension profonde de ce qu'est la vérité sur les objets (pour la logique des prédicats) ou de ce qu'est la vérité tout court (pour le calcul propositionnel). Mais dans ce cas, il me semble que le statut de la logique devient analogue à celui de la « logique transcendantale » dans la philosophie critique kantienne, même si elle est présentée et exposée différemment. Dès lors, ce sont des principes subjectifs ultimes qui gouvernent la rationalité : peut-être n'y a-t-il aucune intuition, mais il existe une certaine compréhension non technique de la vérité véhiculée par le langage, et qui domine tout raisonnement possible, une compréhension qui ne peut être posée et établie dans son autorité fondationnelle que par un sujet transcendantal.

3) Mais cela est insuffisant. En fait, nous n'utilisons pas les dispositifs formels seulement en tant que traductions externes de principes subjectifs absolus. La convenance qui existe entre la morphologie formelle et le contenu logique, qui a été évoqué au 1), nous conduit à considérer le niveau formel-intuitif comme niveau de la *légalité*, de telle manière que la certitude que nous avons concernant la connaissance logique apparaisse à ce niveau.

Je pense faire pour le mieux afin d'illustrer ce point en me référant à un article récent de Stewart Shapiro, dans lequel il discute le travail de Priest[4]. Dans son article[5], Shapiro critique la manière dont Priest défend une certaine logique paraconsistante, appelée *logique dialéthique*. Shapiro examine ce que devient le théorème d'incomplétude de Gödel dans un tel contexte. Si nous travaillons dans la théorie nommée PA* – en substance PA encadrée par la logique dialéthique à laquelle on ajoute le prédicat de vérité T – on peut certainement construire l'énoncé de Gödel G* pour cette théorie, mais nous ne pouvons conclure que G* est indécidable, en l'absence de l'hypothèse de consistance. Il apparaît en fin de compte que G* est prouvable dans PA*. Si nous

[4]. Cf. *Contradiction*, Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1987, Chapitre 3.
[5]. Cf., « Incompleteness and Inconsistency », Mind, Vol. 111, 444, octobre 2002, 817-832.

introduisons un entier g comme code pour la preuve de G*, et un entier q pour G* lui-même, et si nous désignons par $\mathrm{PRF}_{\mathrm{PA}^*}(x,y)$ le prédicat de prouvabilité dans PA, voici ce qui arrive : dans la situation particulière produite par G*, à la fois $\mathrm{PRF}_{\mathrm{PA}^*}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{q})$ et $\neg\mathrm{PRF}_{\mathrm{PA}^*}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{q})$ sont prouvables (en notant en général $\boldsymbol{k}$ le numéral associé à l'entier k). Shapiro commente ceci en ces termes :

> « Je dois avouer que je ne sais pas quoi faire de cette soi-disant possibilité. Mais, plutôt que de compter sur mon manque d'imagination, essayons d'élaborer ce que soutient le dialéthiste le plus consciencieux. Les prédicats $\mathrm{PRF}_{\mathrm{PA}^*}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{q})$ et $\neg\mathrm{PRF}_{\mathrm{PA}^*}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{q})$ possèdent essentiellement la même procédure de vérification informelle. Tout d'abord, nous déballons g, afin de voir quelle suite il code (s'il en code une). Nous écrivons ensuite cette suite (s'il y en a une). Nous vérifions ensuite chaque ligne afin de voir si elle est un axiome de PA* ou bien fait suite aux lignes précédentes via une des règles. Si nous achevons ce travail avec succès, nous vérifions si la dernière ligne est G*. Si tout se passe bien, nous aurons une raison concluante de soutenir que g est effectivement le code d'une PA*-dérivation de G*. Si à une certaine étape quelque chose ne se passe pas bien, nous aurons une raison concluante de soutenir que g n'est pas un code d'une PA*-dérivation de G*. Tout se passe bien partout, et quelque chose se passe mal quelque part. Mais quelle étape de la vérification conduit à des résultats contradictoires ? Est-ce que c'est parce que la dernière ligne dans la dérivation est G* et la dernière ligne de la dérivation n'est pas G*, ou bien parce que la ligne 72 est un axiome et n'est pas un axiome, ou bien parce que la ligne 62 dérive et ne dérive pas des lignes 44 et 51 par le *modus ponens* ? »[6].

Shapiro soutient clairement que, même à supposer que nous soyons prêts à accepter que dans certains cas, sur un plan logique, X et ¬X soient tous deux démontrables, nous ne pouvons accepter que quelque chose en même temps soit et ne soit pas une preuve formelle correcte. Selon moi, nous pouvons comparer son argument au discours aristotélicien en faveur du principe de contradiction, en *Mét.*, Γ : Aristote affirme tout d'abord que le principe de contradiction ne doit pas être prouvé, car il fait partie du fond originel qui nous permet de prouver ; puis il poursuit en justifiant en quelque sorte le principe de contradiction en montrant que celui qui défend la négation de ce dernier s'exclut de la communauté rationnelle, s'exile du royaume de la rationalité. De même, Shapiro montre que Priest se doit de refuser notre certitude usuelle concernant le fait élémentaire d'« être une preuve formelle correcte », puis il suggère de manière sous-jacente – du moins est-ce ainsi que je le comprends – qu'un tel refus conduit Priest en-dehors de notre royaume rationnel.

Plus généralement, nous comptons sur des moyens formels pour décider des cas à propos desquels notre pénétration *a priori* logique hésite, nous accordons une force légale à l'exercice formel. Nous ne considérons pas le comportement formel, l'intuition formelle, ainsi que les entités formelles comme des revêtements extérieurs de la logique, mais comme ce qui véhicule et soutient partiellement par lui-même la logicité. Formulons cela dans les termes de la discussion conduite dans cet article en constatant que l'*a priori* intuitif engagé dans la reconnaissance formelle semble être superposé à l'*a priori* logique discursif véhiculé par la logique en tant que telle. Même si le premier niveau, jouissant d'une certaine autonomie, rend possible une approche critique des principes du second niveau, ils se renforcent l'un l'autre, en réalité, dans notre accord, compréhension, et pratique du noyau canonique de la logique (du calcul des prédicats du premier ordre standard).

Tournons-nous maintenant vers l'autre manière de refuser ma conception de la logique contemporaine : en déclarant que le modèle de la preuve formelle ne doit rien à l'intuition. Cela peut être soutenu, à ma connaissance, de trois façons.

[6]. *Ibid.*, 828-829.

La construction relève de l'action, et non de l'intuition

L'idée de cette thèse est que la construction appartient au domaine de l'action plutôt qu'à celui de l'intuition. Dès lors, l'objection consiste à affirmer que lorsque nous reconnaissons qu'un énoncé est déduit correctement, nous ne faisons en fait que constater que la construction de la conclusion a respecté les règles de construction. La preuve relève de l'action, de l'action d'écrire une suite de formules en respectant un certain ensemble de règles à chaque étape. Reconnaître l'exactitude d'une preuve doit être décrit comme un jugement juridique, et ne doit en aucun cas être conçu comme l'*intuition* de quoi que ce soit.

Aussi devons-nous nous demander s'il est vraiment possible de soustraire de l'idée de construction son contenu *intuitionniste*, qui était si important pour le père fondateur de la pensée constructive, Brouwer.

Comme nous le savons bien, chaque règle d'inférence individuelle s'exprime en termes de l'apparence des formules, en termes de leur aspect morphologique. Chacune de ces règles requiert un regard structurel sur les formules, et demande d'agir sur un tel matériel de manière morphologique ou structurelle, en construisant la forme requise sur la base des morceaux appropriés qui ont été prélevés. C'est pour cette raison qu'on ne peut agir sans voir, non dans le sens de la perception visuelle banale, mais dans le sens schématique spécifique de la « vision formelle », adaptée à l'écriture de nouvelles formules « inférentiellement » légitimes.

L'arbre de construction de la preuve se contente de résumer la séquence de ces actes mentaux morphologiquement motivés, de telle manière que les relations temporelles et morphologiques entre les actes individuels deviennent claires. Cet arbre permet de rendre manifeste la preuve dans sa structure systématique, autant au niveau juridique qu'au niveau intuitif. Lorsque nous écrivons la preuve de manière linéaire sans dresser l'arbre, ce contenu intuitif demeure, bien qu'il ne soit pas exposé synthétiquement.

Cela signifie que dans l'expérience constructive de la preuve, l'intuition, l'action et la loi sont intimement liées. L'arbre fait de la preuve un objet « formellement intuitif », mais ne montre rien d'autre, en même temps, qu'un comportement formel dans ses étapes constitutives, ainsi que la légalité à laquelle obéit ce comportement (dans la mesure où ce qui est tracé est tracé en fonction des règles, ce qui est montré est le remplissement graphique de l'attente du schéma de règle).

Insistons philosophiquement sur ce point. Après tout, le rejet frégéen de l'intuition repose sur une conception extrêmement limitée de celle-ci. Dans sa perspective, l'intuition n'est que le contenu purement individuel de la représentation : le résultat passif de l'influence d'un objet externe, ou bien d'une pression psychologique interne. Mais il existe une tradition pour laquelle l'intuition est à la fois davantage, et autre chose. Bien que nous puissions trouver la définition frégéenne dans les écrits de Kant, nous trouvons également, et dans les mêmes textes, la conception de l'intuition comme schématique, *a priori*, proche de l'imagination, comme une sorte d'action, comportant éventuellement une légalité. Il est clair que l'intuitionnisme de Brouwer, mettant en jeu l'intuition de ce qui est construit en tant que tel, doit être référé à ce concept alternatif kantien d'intuition.

Considérons à présent à un autre type d'objection : celui qui insiste sur le caractère *objectif* des formules et des textes formels.

La construction relève de l'objectivité, et non de l'intuition

Pour ces nouveaux adversaires, ce qui est important concernant les preuves formelles, c'est qu'elles sont inscrites sur la feuille de papier, sur le tableau, ou bien brillent sur l’écran de l’ordinateur. La logique contient les lois de l’« être vrai », ces lois n’ont rien de subjectif, et la formalisation ne fait rien d’autre que de manifester l’objectivité de la logique.

L’emploi international du mot *objectivité*, lequel en constitue en même temps la célébration, relève toujours du jeu de mot. Sémantiquement, le mot devrait dépendre d’une certaine notion d’objet, l’objectivité devrait caractériser ce qui repose sur l’objet ou en provient. Malheureusement, cette condition n’est pas le plus souvent remplie, en telle manière que l’objectivité renvoie seulement au caractère de ce qui n’est en aucune façon personnel ou privé. Peut-être que même dans ces cas on fait implicitement référence à une certaine forme d’objet, mais il s’agirait alors de la figure de l'objet sensoriel de taille moyenne appartenant à l'expérience spatio-temporelle ordinaire, auquel on fait seulement allusion pour soutenir le célèbre « sens robuste de la réalité » mentionné par Russell.

Et, donc, si les preuves formelles manifestent l'objectivité de la logique, est-ce parce qu’elles sont des objets concrets ordinaires ? Je pense que personne ne défendrait sérieusement une telle thèse.

Evidemment, il est parfaitement exact que la formalisation contemporaine a élevé la preuve au statut d'objet : les preuves sont un cas particulier de l'objet mathématique, motivant théories, discussions, catégorisation interne, et ainsi de suite. Je crois important d'insister sur ce point historique, lié à celui de la « textualisation » de la logique (il a été déjà brièvement fait mention de cela au début de cet article). La logique, entendue comme la science la plus générale de la vérité et de la preuve, dans la tradition classique, est censée être immanente à la langue naturelle et au raisonnement spontané. On la regardait par suite comme une manière ou une forme de pensée, impossible à saisir dans un système extérieur de traces, et tout à la fois n’exigeant pas d'équipement linguistique spécifique. Aujourd'hui nous pensons que la logique n'est réellement elle-même que lorsqu'elle est formalisée, ce qui signifie qu'un certain type de langage et une certaine notion de texte ont été conçus afin d'accueillir l'activité logique. La conséquence de ce nouveau contexte linguistique de la logique est que tout ce qui relève de la logique peut être désormais saisi sous la figure d'un certain objet : les formules et les preuves, pour commencer, sont définies comme des objets d’un certain type, et la logique est apte, par exemple, à prouver des choses au sujet de ces objets nommés preuves.

Mais il est clair que, si tel est le cas, ce n'est que parce que les preuves, les termes et les formules ne sont pas des objets *concrets*, plutôt des objets d'une forme bien particulière. Ces objets sont conçus comme se trouvant au-delà de la suite particulière de signes matériels les réalisant chaque fois sur le support matériel. L'implication du *modus ponens* $[(P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$ ne réside pas réellement dans l'encre que j'ai utilisée pour inscrire ou imprimer la formule destinée à l'évoquer, mais constitue plutôt le type unique unifiant la multiplicité illimitée des inscriptions analogues.

Si on accepte de réfléchir sérieusement à ce qui caractérise les «objets formels» employés pour donner à l'activité logique son visage public, alors on devra concéder, du moins me semble-t-il, que leur trait pertinent est leur nature «constructive». Les objets constructifs sont des objets symboliques, de type linguistique, faits de signes répétables, et dont la construction précise obéit à des règles, de telle manière qu'une définition récursive est disponible pour chaque type d'objet particulier (termes, formules, preuves, et ainsi de suite). Nul n'est besoin d'être un mathématicien professionnel comprenant ce que sont les ensembles de la théorie des ensembles, ou les topos ou schémas de Grothendieck, pour étudier la logique : mais on doit être capable de jouer le jeu des objets constructifs, et de comprendre les preuves relatives à de tels objets établies par récurrence sur la construction de l'objet.

Brouwer a mis l'accent sur ce point et montré que le niveau mathématique de la construction, dont il soulignait l'importance, jouissait d'un privilège du point de vue fondationnel : le formaliste comme l'intuitionniste doivent être en mesure de manipuler des objets relatifs à ce niveau. Selon nous, ce qui est important est qu'une telle valeur fondationnelle repose sur le caractère non concret des objets formels (c'est-à-dire constructifs). Ce qui permet aux objets formels d'être ce sur la base de quoi l'on pourra construire la forteresse de la logique et des mathématiques, est le fait qu'ils soient des objets à la fois mentaux, pratiques et symboliques. Lorsqu'un objet de ce type est posé sur la feuille de papier, on peut, en partant des symboles écrits, aussi bien revenir à une séquence d'actes mentaux qu'à un discours réglé. Les objets constructifs sont une sorte de monnaie universelle contenant une certaine signification pratico-symbolique que nous savons, du moins lorsque sa simplicité le permet, actualiser en interne, dans nos pensées. Il est certainement très important que ces objets soient publics et instanciés matériellement, mais l'objectivité qu'ils confèrent à la logique est de l'ordre de la « construction » entendue comme ce mélange d'intuition, d'action et de légalité que nous venons de décrire.

Tournons-nous maintenant vers la quatrième et dernière objection.

La construction relève du processus, et non de l'intuition

Récemment est apparue au sein de nos cercles philosophiques et logiques une autre manière d'insister sur l'objectivité de l'équipement formel, plutôt que sur son caractère constructif-intuitif. Certains affirment aujourd'hui que, fondamentalement, la logique concerne des processus, et que la logique formelle n'est rien d'autre qu'une tentative de représenter et d'étudier un type spécifique de processus : une telle perspective semble, encore une fois, refuser toute pertinence intuitive à la construction. On pourrait soutenir que cette objection additionne ou mélange les deux précédentes : en effet, elle consiste à dire que les constructions sont à la fois des actions et des objets empiriques, dans la mesure où l'*action* considérée de manière objective en troisième personne devient *processus*.

Il me semble que cette perspective a ses racines dans l'histoire de la logique. Dans les années trente, le calcul devint un nouveau problème logique ou mathématique, et la théorie moderne de la calculabilité naquit dans les travaux de Gödel, Turing et Church. Les dispositifs théoriques des fonctions récursives, des machines de Turing et du lambda-calcul furent conçus pour représenter et anticiper de manière formelle ce qu'est un calcul lorsqu'il est considéré au plus haut niveau de généralité. Comme on le sait, ces dispositifs théoriques furent identifiés extensionnellement : les fonctions récursives sont prouvablement les mêmes que les fonctions calculables de Turing et les fonctions lambda-définissables. Mais cette manière d'identifier insiste sur l'idée d'un certain processus – apparaissant dans une sorte de boîte noire – et conduisant, à partir d'une entrée prise dans un certain domaine, à la sortie calculée. Le calcul est considéré comme une sorte de processus, et la science informatique serait la science de ce genre de processus, lesquels n'obéissent pas aux lois du mouvement physique, toujours exprimées en termes du continu mathématique, mais traversent plutôt une suite finie d'étapes discrètes, et ont affaire à des entités également discrètes.

On doit en effet reconnaître que depuis le début, la science informatique fut étroitement associée à la logique, et ce pour de nombreuses raisons. L'idée de constituer le concept moderne de calcul vint de l'*Entscheidungsproblem* de Hilbert : du souhait de déterminer si les théories mathématiques standard étaient syntaxiquement complètes, et de l'étude de la question de savoir si une procédure mécanique pouvait reconnaître une formule comme théorème lorsqu'elle en est un, comme non-théorème dans le cas contraire. Gödel prouva son théorème d'incomplétude grâce au tour de l'arithmétisation de la syntaxe, qui permet lui-même de prouver la représentabilité des fonctions récursives, témoignant d'une profonde adéquation entre calcul et logique. Au moment gödélien, nous pouvons également associer l'idée générale suivant laquelle la donnée d'un système formel d'inférence équivaut à celle d'une machine de Turing, les théorèmes du premier étant identifiés aux sorties successives de la seconde, si on entre les codes des entiers naturels successifs.

Le lien entre la science informatique et la logique est aujourd'hui si fort qu'un nombre important de contributions à la science logique sont publiées dans des collections d'informatique. Il est clair que la correspondance de Curry-Howard a joué un grand rôle dans cette évolution. Rappelons ici l'essentiel de celle-ci : les preuves de la logique de Heyting peuvent être intégralement traduites dans les termes du lambda-calcul typé. Plus précisément, le fait qu'un terme quelconque t exprime ou traduise la preuve de la formule A est équivalent au fait que A dit le type du terme t. Ce qui est important, selon nous, est que la preuve est alors implicitement considérée comme une sorte de processus agissant sur des prémisses. Elle peut également être mise en regard d'un programme, la question du *type* de la preuve-processus codée par un lambda-terme étant analogue à celle de la *spécification* d'un programme (que fait ce programme, quelle action va-t-il avoir sur les données ?). Il est ainsi devenu naturel de considérer les preuves comme une espèce particulière de processus, traduisibles en lambda-termes.

La vision résultante, comme annoncé, est que la logique ne semble pas être autre chose qu'une physique discrète des processus computationnels. On est donc à nouveau tenté de considérer la logique comme objective. La leçon de la formalisation serait que la logique a affaire à certains processus computationnels particuliers, qui sont, de droit, parfaitement objectifs, et sont même objectivement manifestés aujourd'hui par le comportement des ordinateurs. Apparemment, donc, l'aspect « intuitif » de la preuve et de la logique est complètement perdu.

Je puis ajouter une remarque contextuelle, et en partie polémique : un philosophe analytique classique est plus enclin à adopter cette perspective sur la logique et la preuve que la perspective brouwérienne que j'ai défendue un peu plus haut. S'il agit de la sorte, c'est parce qu'une telle attitude semble plus naturaliste, technique et scientifiquement objective. Lorsqu'un tel philosophe entend dire qu'il existe une manière de concevoir la logique qui en fait l'étude générale de processus discrets (qu'elle soit soutenue par la neurophysiologie ou réalisée par les ordinateurs), il se sent bien plus attiré que par la vieille rengaine psychologiste et subjective, reconnue par lui dans la référence faite à l'intuition, dans la première partie du présent propos. C'est pour cette raison, je pense, que la correspondance de Curry-Howard est commentée avec un respect philosophique croissant, tandis que la BHK-explication, justifiant les règles de la logique de Heyting par une clarification concomitante des deux notions relatives de preuve et de construction, n'a jamais été considérée si favorablement.

J'en arrive maintenant à notre sujet. Selon moi, cette nouvelle conception souffre de deux difficultés.

On pourrait qualifier la première d'épistémologique. L'étude des processus computationnels va au-delà de la logique et pénètre le champ de ce qui peut plus proprement être appelé mathématique. En effet, une fonction récursive, par exemple, n'est pas un objet constructif, mais une règle destinée à produire une sortie si un objet constructif est donné comme entrée. En ce sens, toute fonction récursive enveloppe un type d'infinité. La thèse de Church met en lumière l'inter-traductibilité des différentes définitions théoriques du calcul (fonction récursive, lambda-calcul, ou machine de Turing, par exemple) : mais elles sont identifiées au niveau extensionnel, pour autant qu'elles donnent naissance aux mêmes fonctions calculables. Le concept d'une fonction récursive définie sur un *n*-uplet d'entiers quelconque est le concept d'un éventail infini de possibles processus et résultats élémentaires. Evidemment, la classe des fonctions récursives est définie de façon récursive, rendant possible la saisie de chacune d'entre elles à travers son arbre, en tant que construite à partir des fonctions élémentaires à l'aide des règles autorisées. Mais il s'agit seulement d'une façon de les nommer et de les connaître, sans que cela rende compte de leur signification procédurale. Les fonctions calculables fournissent une alternative au développement idéaliste des entités ensemblistes, et d'abord aux applications ensemblistes, conçues comme des triplets de la forme (*source*, *graphe*, *but*). Aussi n'est-il pas certain que la réinterprétation de la logique comme physique des processus discrets lui fasse justice. Tout au moins, si nous adoptons une telle interprétation, il semble que nous oublions l'aspect fondationnel de la logique, le fait qu'elle doit s'exprimer et théoriser avant que nous puissions pénétrer la complexité mathématique de l'objet, provenant justement de la prise en compte des applications, récursives ou ensemblistes. Ce premier argument, ou résistance, exprime déjà, en quelque sorte, notre désir de maintenir le visage philosophique de la logique, envisagé ici comme son intention fondationnelle, ou son caractère non encore engagé dans le développement mathématique.

Ceci me conduit à la seconde difficulté, qui touche à la vérité et au langage. La logique a toujours été considérée comme la science de la vérité, et, à la suite de la révolution frégéenne, au tournant du 19e et 20e siècle, on l'estima liée au langage par un lien privilégié. Dans ce contexte, on n'oubliait pas le lien entre logique et légitimité : l'idée générale consistait à affirmer que la logique, dès lors qu'on la voyait en un sens imprimée à l'origine dans le langage (comme le montre de manière si convaincante l'ouvrage de Quine *Word and Object*), avait encore plus de droits qu'auparavant d'être considérée comme la clef de tout travail fondationnel. Redéfinie comme théorie radicale ou générale du langage, la logique ne perdit donc pas sa valeur épistémologique et fondationnelle. Au contraire, si nous adoptons maintenant la définition de la logique comme physique des processus discrets, nous en faisons, au moins apparemment, une spécification empirique de la physique. Le lien avec le problème général de la vérité et de la légitimité ne serait alors qu'un vieux souvenir, tributaire de notre mémoire du fait que les processus de la parole et de l'écriture sont des exemples de processus discrets, et que de nombreux actes de langage portent une prétention à la vérité ; ou du fait que chaque acte de langage soulève, au sein de la communauté humaine, la question de sa légitimité.

La situation est entièrement différente si nous admettons, un siècle après, l'enseignement de Brouwer qui consiste à affirmer, *grosso modo*, qu'il existe un lien étroit entre logique et intuition. L'intuition est connue comme un acteur central de la discussion classique portant sur la vérité et la légitimité, au moins pour ceux qui sont attentifs aux travaux de Descartes, Kant et Husserl, pour ne citer que trois noms majeurs. Et dans la mesure où l'intuitionnisme nous montre de quelle façon l'intuition prend part à notre saisie des structures linguistiques élémentaires, notre référence à Brouwer nous aide à « sauver » la profonde conception frégéenne du lien privilégié entre logique et langage à l'intérieur du nouveau contexte scientifique mettant l'accent sur calculs et processus.

C'est pourquoi nous recommandons de considérer la preuve comme essentiellement organisée en la construction d'une certaine structure spéciale, intuitionnée en même temps dans sa structure d'arbre, plutôt que comme processus devant être compris dans le contexte des fonctions calculables « infinies ». Nous pensons que la vérité exige ce type de preuves, parce que l'acte de prouver a sa racine dans la reconnaissance par le langage de sa propre structure linguistique, et parce que, comme Chomsky et Montague l'ont tous deux montré, selon deux points de vue différents, les phrases sont des constructions au sens de Brouwer.

En résumé, la conception brouwérienne de la construction comme intuition permet de faire le lien entre la théorie informatique contemporaine et les préoccupations philosophiques et épistémologiques associant la preuve au langage et à la vérité.

La sémantique de la preuve

Je me tourne maintenant vers la seconde partie de cet article, dans laquelle je vais tenter d'analyser certains développements contemporains touchant la théorie de la preuve, et ce en revenant à la conception fondamentale que Kant se fait de la preuve mathématique.

Comme chacun sait, Kant fait une grande différence entre la preuve au sens mathématique et au sens philosophique. Les preuves philosophiques sont, en termes kantiens, purement discursives, ce qui signifie également qu'elles sont des preuves purement logiques, et pour cette raison, elles sont incapables de fournir une quelconque information, elles ne peuvent rien faire de mieux qu'expliciter les relations déjà données entre les concepts, dans le langage, et ainsi ne peuvent conduire qu'à des vérités analytiques (exprimant comment les conclusions sont incluses dans les prémisses). Kant appelle ces preuves « acroamatiques ». Il les qualifie également d'« apodictiques », car ce que nous affirmons sous l'autorité d'une telle preuve peut être affirmé universellement et inconditionnellement, avec nécessité. Mais, en même temps, c'est inintéressant, puisque cela ne nous permet pas d'« ajouter » à un concept des propriétés dont ne serait pas connue à l'avance l'appartenance à ce dernier.

Au contraire, les preuves mathématiques sont pour Kant apodictiques et *intuitives*, ce pourquoi elles rendent possible des jugements *synthétiques*. Kant décrit cette particularité de la méthode mathématique de trois façons :

1) Les mathématiques ont une manière spécifique de définir. Lorsque le mathématicien définit un objet quelconque, son propos tient lieu de prescription, en quelque sorte : c'est la définition qui décide ce qu'est cet objet, comment et quand on peut le reconnaître, cette définition donnant la loi sur ces matières. En-dehors des mathématiques, le *definiendum* est donné antérieurement à la définition, et la définition énumère les traits conceptuels qui caractérisent l'objet en question (lequel n'est pas singulier : il s'agit d'une espèce, auquel on a donné un nom commun). C'est précisément le cas de la philosophie : Kant donne (dans une note de bas de page) l'exemple de la tentative philosophique pour définir la notion de *droit*, et déclare que les juges et les juristes en sont incapables[7]; il regarde la contribution philosophique à une telle définition comme une sorte d'interprétation, au sein de laquelle nous confrontons, au niveau de la signification, la liste des traits conceptuels que nous avons découverts au concept de droit tel qu'il est compris traditionnellement, liste que nous ne cessons d'améliorer et de corriger, jusqu'à ce que nous ayons le sentiment d'avoir explicité la notion de *droit*.

2) Les mathématiques peuvent se référer à des axiomes, c'est-à-dire à des jugements

[7]Cf. *Critique de la raison pure*, A 730-731, B 758-759.

enveloppant une synthèse de concepts qui apparaît nécessaire dans l'intuition.

3) Mais, finalement, c'est la *construction de concept* qui régit les mouvements « inférentiels » de la preuve mathématique (cette explication concerne également le second point).

Disons quelques mots de la construction de concept, clef de la discussion qui va suivre. Kant affirme que nous sommes capables de produire un référent singulier pour nos concepts mathématiques dans le cadre de l'intuition pure, sans qu'en même temps, nous ayons affaire à ce singulier comme singulier : nous le considérons plutôt comme représentatif du contenu universel du concept. Ce singulier va ensuite cumuler deux avantages, apparemment contradictoires : il se tiendra face au regard de notre pensée, comme tout singulier concret, ce qui nous permettra de le voir et de le manipuler ; mais, en même temps, tous nos comportements envers lui, description ou raisonnement, se fonderont seulement sur le concept illustré et non sur les traits particuliers de l'illustration singulière, sans parler des propriétés matérielles de la marque sensible choisie pour représenter cet élément singulier. Kant affirme que le processus correspondant à une telle illustration générique des concepts mathématiques n'est ni extraordinaire, ni nouveau, mais que nous pouvons reconnaître en lui la pratique mathématique commune : disons que, pour donner un exemple simple, lorsque nous dessinons un triangle quelconque pour résoudre un problème concernant les triangles, nous ne faisons rien d'autre que « construire le concept de triangle ».

Dès lors, nous pouvons décrire la façon dont Kant conçoit l'activité mathématique démonstrative comme suit : face à un problème mathématique spécifique, le mathématicien construit les concepts adéquats dans l'intuition (en s'aidant pour cela de tracés sensibles) ; qui plus est, il ajoute, en général, d'autres constructions à la configuration ainsi réalisée exhibant les concepts impliqués ; mais à la fin, lorsqu'il voit la réponse à la question dans l'image ainsi produite, il est par définition capable de formuler de manière logique le lien de ces résultats avec les concepts dont tout provient, car tout ce qui se présente au niveau intuitif peut être saisi au niveau conceptuel; les éléments intuitifs ne manquent jamais de valoir pour la généralité des concepts. Dès lors, on peut penser que la preuve mathématique obéit à une sorte de rythme ternaire : nous commençons à un niveau conceptuel, puis nous « plongeons » en quelque sorte dans l'océan de l'intuition pure, enfin nous remontons à l'issue de notre nage à une formulation logique exacte.

La question habituelle est de savoir si une telle description peut survivre au déclin de l'intuition de la géométrie euclidienne : l'exemple principal de Kant, celui de la preuve que la somme des trois angles du triangle est égale à deux droits, semble appartenir à un cadre mathématique définitivement révolu. Cependant, nous avons au moins une indication, dans le texte kantien, en faveur de l'idée que son concept de construction va bien plus loin : il décrit ce qu'il appelle la « méthode algébrique » comme étant un autre exemple de la construction de concept. Ecoutons Kant :

> « La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des grandeurs, et où, sans jamais regarder l'aspect heuristique, on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux » [8].

Je crois que cette citation indique que Kant aurait été prêt à comprendre nos pouvoirs symboliques contemporains à la lumière de la notion de la construction de

[8] A734, B762, traduction de la Pleïade.

concept. L'idée, contenue dans cette citation, que la manipulation de symboles permet d'atteindre à la fois la vérité et la preuve, et celle, complémentaire, que la possibilité de l'erreur est interdite par le fait que toute chose ou acte pertinent se tient devant notre regard, plaident en ce sens. Pour Kant, l'essentiel de l'algèbre littérale, telle qu'on la pratique depuis Viète, consiste dans le fait que non seulement les concepts indéterminés des quantités, mais également les actes de raisonnement élémentaires concernant de tels concepts sont exhibés par les signes et les gestes qui opèrent sur eux.

En résumé, Kant tente de comprendre la différence qui existe entre logique et mathématique, la même en l'occurrence, selon lui, qu'entre philosophie et mathématiques : la logique, à l'instar de la philosophie, doit conduire son raisonnement sans jamais exhiber l'objet et la vérité de l'objet; elle prouve aveuglement, en quelque sorte, en n'utilisant que les règles du discours et de la grammaire. Les mathématiques, au contraire, sont en mesure d'exhiber l'objet sous l'aspect d'un singulier, ce dernier représentant néanmoins la généralité du concept donné. Pour cette raison, les preuves mathématiques exhibent autant l'objet qu'elles prouvent la vérité. La preuve et l'évidence se joignent donc au sein de la preuve mathématique, jusqu'à un certain point.

Dans ce qui suit, je montrerai que nous n'avons pas oublié l'exigence qui enjoint d'ajouter l'évidence aux preuves purement discursives. On peut même dire que cette exigence a été étendue à la partie ou à l'aspect techniquement logique de la preuve : cela n'est pas surprenant si l'on est attentif au fait que l'émergence de la logique mathématique contemporaine est venue troubler la frontière entre logique et mathématiques (ce qui ne signifie pas que la tâche philosophique consistant à formuler la distinction entre elles ait disparu ou soit devenue impossible). Mais la situation a changé en substance dans le sens suivant : alors que Kant croyait que les mathématiques comme telles garantissaient le fait que leurs preuves fournissaient l'évidence correspondante, ou à tout le moins l'introduisaient au sein de leur mouvement spontané, nous voyons aujourd'hui les preuves apparaître d'abord à un niveau « non monstratif », strictement logique, pour réclamer alors leur complétion par une contrepartie intuitive conférant l'évidence. J'ai choisi d'appeler généralement ce complément ou cette addition *sémantique des preuves*, empruntant cette expression à la littérature contemporaine, sans me tenir à respecter la signification qu'on lui donne habituellement[9].

Je vais maintenant tenter d'illustrer ces idées en m'aidant, en premier lieu, de la « BHK-explication » des règles de la logique intuitionniste.

La BHK-explication

Comme chacun sait, les trois lettres BHK correspondent à Brouwer, Heyting et Kolmogoroff. Techniquement, cette explication est censée justifier la logique de Heyting.

Brouwer ne croyait pas à la logique : il refusait qu'un genre de connaissance séparé puisse régir légitimement les mathématiques. Pour Brouwer, le type de certitude que les mathématiques contiennent est la seule et l'ultime : elle ne peut être soumise à une autre partie de la rationalité. Cela signifie également que la logique, dans la mesure où nous pouvons la définir, n'est pas techniquement isolée des mathématiques. Brouwer

[9] J'ai rencontré l'expression dans l'ouvrage de Girard *Proof Theory and Logical Complexity* (Naples, 1987, Bibliopolis, 1987). Girard utilise l'expression « sémantique des preuves » pour qualifier la définition que Heyting donne de la preuve arithmétique conformément à la BHK-explication, tout en constatant qu'elle apparaît comme étant intimement « (…) liée aux questions de normalisation dans la déduction naturelle ». Je l'ai également rencontrée dans le chapitre de Constable intitulés « Types in Logic, Mathematics and Programming » dans le *Handbook of Proof Theory* (Elsevier, 1998, 683-786), p.692.

réclamait également le droit pour les mathématiques d'utiliser des outils et des méthodes de raisonnement d'abord apparus dans le domaine de la logique.

Néanmoins, il définit des principes devant être suivis si l'on veut atteindre des « vérités réelles », à savoir des vérités constructives : ainsi, il institutionnalisa un type de vérité. Mais où se trouve un certain type de vérité, doit se trouver aussi un certain type de logique, si on entend par logique un ensemble de règles qui nous permet d'inférer des jugements vrais à partir de jugements vrais. Aussi doit-il y avoir une logique intuitionniste liée à la recherche de vérités intuitionnistes, de la même manière qu'il y a une logique classique liée à la recherche de vérités classiques. C'est cette logique que Heyting déclara avoir rendue explicite en nous donnant son fameux système déductif[10] : ce système permet de dériver toutes les “vérités intuitionnistes universelles”, il est donc adapté à encadrer une arithmétique intuitionniste (HA) ou une théorie des ensembles intuitionniste (IZF).

Mais on ne peut complètement oublier la différence de la conception logique de Brouwer. On peut formuler cette différence dans une autre langue en disant simplement que Brouwer ne pensait pas que la preuve mathématique fût purement « discursive » : il pensait que les preuves devaient être auto-justificatrices, au sens où elles étaient supposées exhiber l'objet tout en en déduisant la vérité. Ainsi, on peut affirmer que Brouwer partageait plus ou moins la vue kantienne de la preuve.

D'une certaine manière, la BHK-explication fait le lien entre la logique de Heyting, conçue comme moyen formel, et les vues profondes de Brouwer concernant la preuve. Dans la mesure où, pour un intuitionniste, l'enracinement intuitif de la vérité est, comme on sait, la construction, la BHK-explication doit lier la preuve à la construction. Ainsi que Troelstra le dit clairement dans son commentaire, la BHK-explication considère en fait la preuve et la construction comme des notions primitives indéfinissables, qui cependant voient leur relation clarifiée par cette explication[11]. Une telle clarification est donnée simplement en rendant explicites les conditions sous lesquelles un énoncé complexe peut être considéré comme prouvé, en se référant à ses éléments constituants. Ainsi, la BHK-explication, rappelons-le, se déroule comme suit :

i) Nous avons une preuve de $A \wedge B$ lorsque nous avons une preuve de A et une preuve de B.

ii) Nous avons une preuve de $A \vee B$ lorsque nous avons un choix entre 0 et 1, et une preuve de A si on a choisi 0, de B si 1 l'a été.

iii) Nous avons une preuve de $A \rightarrow B$ lorsque nous avons une construction qui, donnée une preuve p de A, construit une preuve de B à partir de p.

iv) Nous avons une preuve de $\exists x A(x)$ lorsque nous avons un objet explicite n, et une preuve de $A(n)$.

v) Nous avons une preuve de $\forall x A(x)$ lorsque nous avons une construction qui,

---

10 Cf. Heyting, *Intuitionism, and introduction*, 105-109.

11 Cf. Troelstra A., “Constructive Mathematics”, in Handbook of mathematical logic, Elsevier, 1977, p.978 :

« Cette interprétation des constantes logiques représente le premier exemple d'introduction de concepts abstraits dans la mathématique constructive (“preuve”, “construction”) ; et c'est notre compréhension de ces concepts (notre réflexion sur eux) qui nous rend capables de voir que les lois de la logique des prédicats intutionniste sont valides dans cette interprétation (quelle que soit l'extension exacte des concepts de preuve et de construction, l'explication est suffisamment claire pour cela). [« This interpretation of the logical constants presents a first example of the introduction of *abstract* concepts in constructive mathematics (“proof”, “construction”) ; and it is our understanding of these concepts (reflection on them) which enables us to see that the laws of intuitionistic predicate logic are valid on that interpretation (whatever the *exact* extension of the concepts of proof and construction is, the explanation is sufficiently clear fort this) »].

donné un objet n, construit la preuve de $A(n)$.

Dans chacun des cinq cas, la règle nous indique comment « construire » la certitude du jugement complexe. Ainsi, si la certitude constructive est donnée pour les jugements constituants, elle se transmet au jugement complexe. Et, pour cette raison, il semble qu'une logique dotée de la BHK-explication ne nous conduira jamais à affirmer quoi que ce soit sans que l'on soit en mesure de présenter une construction complexe justifiant nos dires : nous n'avons qu'à enraciner l'arbre contenant notre justification dans les constructions individuelles sous-jacentes à chaque jugement atomique, et ensuite construire la construction justificative globale, en suivant la BHK-explication; si le mode d'inférence obéit à la BHK-explication, la construction indiquée par cette dernière ajoute l'évidence à la preuve, soit en exhibant la procédure justificative du jugement, s'il est logiquement valide, soit, au cas où ce dernier n'est pas universellement valide, en présentant cette procédure comme quelque chose qui doit opérer sur les constructions offrant l'évidence des jugements élémentaires, afin d'aboutir à l'évidence du jugement complexe prouvé. En dernière instance, les notions de preuve et de construction en viennent à coïncider si les jugements atomiques peuvent être justifiés constructivement.

Ainsi, BHK semble expliquer véritablement ce qu'est une preuve, et satisfait aux standards kantiens. Ajoutons ici que, dans une perspective brouwérienne, ce n'est pas seulement la preuve « que P » et la construction de P qui peuvent être mis en coïncidence, mais également la considération mentale de P, l'action interne « que P », et, en un sens, la déclaration « que P » : pour Brouwer, si je comprend bien sa philosophie, tout cela est P, en tant que *construction*. Pour cette raison, la philosophie de Brouwer va au-delà de la contribution « sémantique » de la BHK-explication, ajoutant l'évidence à la preuve technique de Heyting, tout en justifiant ses règles. Afin de résumer cette conception profonde de Brouwer, on peut dire qu'il a tenté de décrire de façon holiste les mathématiques, l'arithmétique et la logique, en les identifiant plus ou moins, dans la science de la vérité constructive, cette discipline unifiée étant régie par un régime de preuve de type kantien.

La seconde étape historique de cette exploration contemporaine de la sémantique de la preuve est celle de la *réalisation*.

Réalisation

Selon moi, la réalisation, conçue par Kleene, constitue une autre tentative de définir une « sémantique des preuves ». L'idée de base consistait à affirmer que l'on peut associer à une formule arithmétique intuitionniste quelconque, lorsqu'elle vraie, un nombre entier n, qui "réalise" la formule, en ce sens qu'il encapsule et rappelle la procédure de sa justification constructive. Pour cette raison, la définition technique de ce « n réalise A » [noté n **r** A], s'énonce comme suit :

(i) Si A est de la forme $t_1=t_2$ et est vrai (et donc prouvable dans HA), alors un nombre entier quelconque réalise A.

(ii) Si A est de la forme $B\wedge C$, alors n **r** A si n code le couple $(j_1(n), j_2(n))$ et si d'un côté $j_1(n)$ **r** B , de l'autre $j_2(n)$ **r** C .

Si A est de la forme $B\vee C$, alors n **r** A si A code le couple $(j_1(n), j_2(n))$, et $j_2(n)$**r** B au cas où $j_1(n)=0$, $j_2(n)$**r** C dans l'autre cas.

Si A est de la forme $B\rightarrow C$, alors n **r** A signifie que pour tout entier y, si y **r** B, alors $\{x\}(y)$ existe et $\{x\}(y)$ **r** C.

Si A est de la forme $\exists x\, B$, alors n **r** A si n code le couple $(j_1(n), j_2(n))$, et $j_2(n)$ **r** $B(j_1(n))$.

Si A est de la forme $\forall x\, B$, alors x **r** A signifie que pour tout entier y, $\{x\}(y)$ existe et $\{x\}(y)$ **r** B.

Il n'est pas difficile de voir ce que cette définition reprend de la BHK-explication. Troelstra indique que « la réalisabilité est proche de l'esprit (peut être considérée comme une variante) de la BHK-explication »[12]. En fait, la réalisabilité interprète la « construction » justifiant A comme un entier, et fixe les conditions pour qu'un entier n compte comme une construction justificative de A. Pour une formule atomique élémentaire du type $t_1=t_2$, rien n'est exigé de n, n'importe quel entier fait l'affaire : cela signifie que l'on considère que la formule comporte déjà en elle-même la justification qu'elle mérite. Dans les autres cas un entier qui réalise A exhibe la justification constructive inhérente à une preuve supposée de A dans HA, dans la mesure où l'on peut prouver méta-mathématiquement qu'une formule A est prouvable dans HA précisément lorsqu'elle est « réalisable ». On peut dire qu'un tel entier montre la façon dont on peut aboutir à l'évidence de la formule complexe à partir des évidences élémentaires (de formules du type 7+5=12). La différence entre la réalisabilité et la BHK-explication consiste dans le fait que le mot « construction » est dans certains cas traduit par la référence à une « action récursive » : à l'action d'une fonction récursive codée par un nombre entier sur un autre nombre entier.

La « sémantique des preuves », dans ce cas, s'adresse aux preuves dans HA. Un entier réalisant A ajoute à une telle preuve l'évidence constructive correspondant à la façon dont sa vérité provient éventuellement de la vérité de jugements finis élémentaires. Pour de tels jugements, l'évidence devrait être conçue comme étant déjà donnée par les jugements, ou leur étant inhérente.

Ainsi rencontrons-nous à nouveau le problème consistant à obtenir une sémantique des preuves intégrale, représentant non seulement la manière dont les opérations logiques impliquées dans l'assertion du jugement complexe transmettent l'évidence, mais aussi l'évidence inhérente à ses composants élémentaires.

Venons-en maintenant à la troisième étape de cette exploration théorique contemporaine de la sémantique des preuves : la correspondance de Curry-Howard.

La correspondance de Curry-Howard

Rappelons tout d'abord en quoi consiste la correspondance de Curry-Howard. Nous pouvons ajouter le concept de *type* au lambda-calcul : nous définissons des types pour les termes, et des règles afin d'assigner son type à chaque terme. Il existe des types élémentaires (notons-les A, B, etc.), et nous pouvons former des types complexes à l'aide de règles du genre suivant :

i) Si A et B sont des types, $A \rightarrow B$ l'est également.
ii) Si A et B sont des types, $A \times B$ l'est également.

L'assignation de types aux termes est censée fonctionner de telle manière que quand s est du type $A \rightarrow B$ et t du type A, st est du type B ; et lorsque s est du type B et x, libre dans s, est du type A, alors la lambda-abstraction $(\lambda x.s)$ est du type $A \rightarrow B$.

Ces exigences ne font qu'exprimer le fait que nous comprenons le lambda-calcul de manière fonctionnelle, en sorte que le produit st signifie pour nous l'application de s à t, et que nous considérons $(\lambda x.s)$ comme étant la fonction qui assigne s à x. Ces règles signifient également que l'assignation d'un certain type à un terme est supposée refléter la structure fonctionnelle complexe du terme : quel type d'action le terme peut exercer

[12] *Op. cit.*, 988.

sur les termes qui lui sont donnés comme nourriture fonctionnelle.

Afin de correspondre à l'idée du type *produit cartésien* $A{\times}B$, nous devons supposer que certaines constantes sont à notre disposition dans notre lambda- calcul : disons qu'à partir des termes s et t nous pouvons former le terme $\langle s,t\rangle$, et qu'à partir d'un terme quelconque s nous pouvons former les termes $\pi_1(s)$ et $\pi_2(s)$. Nous ajoutons les règles de réduction évidentes $\pi_1(\langle s,t\rangle)\to s$ et $\pi_2(\langle s,t\rangle)\to t$ à la logique générale de réduction des termes.

Nous définissons ensuite une manière d'associer un terme quelconque du lambda-calcul typé à chaque preuve du système de la déduction naturelle intuitionniste. La vue profonde est celle de la conception des « formules comme types » : nous décidons de faire équivaloir philosophiquement la formule à la classe de ses preuves, la classe des entités au titre desquelles la formule est valide. Du même coup, la formule devient également descriptible comme le *type* de ses preuves : elle est ce que ses preuves partagent, ont en commun. Lorsque nous effectuons une déduction naturelle, nous utilisons certaines formules comme prémisses : elles interviennent sans qu'on en connaisse la justification. Nous pouvons traduire ceci en disant qu'elles sont soutenues par une preuve totalement indéterminée, à propos de laquelle nous savons seulement qu'elle est une preuve de la formule en question : qu'elle est typée par cette formule dans le nouveau langage. Nous introduisons ensuite l'idée qu'à chaque étape de la preuve, la formule apparaissant à un nœud quelconque de l'arbre sera accompagnée d'un terme, indiquant la façon dont on a dérivé cette formule en suivant les règles, en général à partir de certaines prémisses que l'on aura invoquées. Nous écrivons alors $t : A$, t étant un terme du lambda-calcul, et A étant conçu à la fois comme un type et une formule (conformément à notre philosophie des « formules comme types »), afin d'exprimer tout aussi bien que le type A peut être assigné à t et que t contient la structure d'une preuve de A. Nos règles impliquent que les deux assertions disent la même chose. Nous en faisons la liste (le lecteur aura remarqué que les règles font référence à d'autres schèmes de formation de types complexes que les deux précédents : notre exposé ne prétend pas être techniquement complet, mais on trouvera un traitement satisfaisant dans l'ouvrage *Basic Proof Theory*[13])

(i) Si $s{:}A$ et $t{:}A$, alors $\langle s,t\rangle{:}A\wedge B$.

(ii) Si $t{:}A\wedge B$, alors $\pi_1(t){:}A$.

(iii) Si $t{:}A\wedge B$, alors $\pi_2(t){:}B$.

(iv) Si $s{:}A\to B$ et $t{:}A$, alors $st{:}B$.

(v) Si on obtient $t{:}B$ à l'issue d'un chemin qui s'amorce par une introduction de prémisse $x{:}A$, alors $(\lambda x.t){:}A\to B$.

(vi) Si $t{:}A(x)$, alors $(\lambda x.t){:}\ \forall xA(x)$.

(vii) Si $s{:}\ \forall xA(x)$, alors $st{:}A(t)$.

Les règles (i), (ii), (iii) correspondent aux règles d'introduction et d'élimination pour $\wedge$. Les règles (iv) et (v) correspondent aux règles d'introduction et d'élimination pour $\to$. Les règles (vi) et (vii) correspondent aux règles d'introduction et d'élimination pour $\forall$.

Ces règles, d'un côté, entraînent globalement que le terme t tel que $t : B$ garde la trace de la manière dont la preuve de B part de certaines prémisses – représentées par les variables apparaissant libres dans t – pour aller jusqu'à B. Dès lors, ce terme peut être

[13] Cf. Troelstra, A. et Schwichtenberg, H., 1996, 2000, Basic Proof Theory, Cambridge, Cambridge University Press, ch. 1 et 2.

regardé comme une sorte de code pour la preuve, reflétant l'intégralité de sa structure.

D'un autre côté, chaque règle peut être considérée comme exprimant l'assignation de son type au terme écrit à la gauche du symbole « : ». En effet, si les assignations de type données après le « si » de la règle sont valides, alors la nouvelle assignation de type donnée après le « alors » de la règle est également valide. Dans la mesure où, au départ, l'assignation du type des variables associées aux prémisses est par définition correcte, au nom de la conception des « formules comme types », on peut globalement être sûr, récursivement, que lorsque t représente la preuve de A, A est le type correct pour t.

Mais qu'enseigne la correspondance de Curry-Howard au sujet de la sémantique des preuves ? Tout d'abord, cette correspondance est elle aussi très proche de la BHK-explication. Nous pourrions reformuler nos règles dans les termes de cette dernière : par exemple, pour les règles (i)-(iii) une preuve de $A \wedge B$ a un code qui est le terme-conjonction des codes de A et B, et les règles (iv) et (v) disent toutes deux qu'une preuve de $A \rightarrow B$ est une fonction associant une preuve de B à toute preuve supposée donnée de A. En général, la correspondance de Curry-Howard (CHC) semble dire en deux fois ce que la BHK-explication dit en une seule.

Ensuite, peut-on considérer que le terme t associé à la preuve de B exhibe l'évidence conférée par cette preuve ? Qu'il apporte un certain type d'évidence à ce que B exhibe comme son objet ? Nous devons répondre de façon très prudente. Un lambda terme rend un calcul explicite, le langage du lambda calcul est un des cadres théoriques disponibles exprimant la puissance générale du calcul, comme on le sait. Ainsi, ce que la correspondance associe à la preuve est un certain calcul. Prenons un exemple très simple : $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ est certainement un théorème du calcul logique pour lequel CHC est défini. Quel genre de terme associe-t-on à ce théorème ? Appliquons les règles :

(1) Si $x: A \wedge (A \rightarrow B)$, alors $\pi_1(x):A$.
(2) Si $x: A \wedge (A \rightarrow B)$, alors $\pi_2(x):A \rightarrow B$.
(3) Si $\pi_1(x):A$ et $\pi_2(x):A \rightarrow B$, alors $\pi_2(x)\ \pi_1(x):B$
(4) Par conséquent, $(\lambda x.\ \pi_2(x)\ \pi_1(x)): (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.

On voit que le terme $(\lambda x.\ \pi_2(x)\ \pi_1(x))$ exprime le calcul qui produit une preuve de B quand est donnée une preuve de $A \wedge (A \rightarrow B)$. Aussi, CHC identifie-t-il la construction que la BHK-explication exige afin d'avoir une preuve de l'implication $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$. Dans notre commentaire de la BHK-explication et de la réalisabilité, nous avons déjà souligné le problème du caractère hétérogène de l'évidence qui soutient les jugements mathématiques élémentaires, dans le cas où ce que nous prouvons n'est pas une formule logique universellement valide : il doit exister une certaine évidence élémentaire en faveur de la vérité de ces jugements (tels les $t_1=t_2$ dans le contexte de l'arithmétique de Heyting), que Brouwer reconnaîtrait comme étant donnée par la construction du contenu mathématique de la formule. Et, de l'autre côté, on a le « chemin constructif » de l'arborescence de la preuve, qu'on analyse déjà comme un certain calcul dans l'approche de la réalisabilité (une fonction récursive encodée par un entier), et qu'on interprète désormais résolument, avec CHC, en termes de calcul, le contenu du calcul étant cette fois-ci plutôt encodé par un lambda terme.

Ainsi, globalement, cette étude concernant la sémantique des preuves découvre que le calcul constitue l'évidence incorporée dans les preuves : lorsque nous déduisons, nous écrivons les phrases successives de la preuve comme si nous les calculions à partir des précédentes. Prouver une formule c'est exhiber le calcul requis par la morphologie de la formule, et l'évidence associée à la preuve est l'encodage explicite de ce calcul, tel que la preuve l'a élaboré. Ce qui fut anticipé par la BHK-explication sous le nom de *construction* semble avoir été reconnu scientifiquement comme *calcul*, ce dernier étant lui-même exprimé dans un des cadres théoriques contemporains disponibles (fonctions récursives, lambda-calcul).

Mais si la preuve n'est pas purement logique, demeure le problème des vérités élémentaires, dont l'évidence devrait être décrite de façon différente, à moins que nous la supposions être inhérente aux formules exprimant les vérités.

De notre point de vue, la véritable question est celle du caractère monstratif de ces « sémantiques des preuves » : ajoutent-t-elles quelque chose qui conduise à une certaine vision (non-empirique, généralisée), apportent-t-elles quelque intuition, ou bien se contentent-elles de rejoindre le calcul comme traitement objectif, ainsi que nous l'avons vu plus haut ? Dès lors, la question est double : 1) Peut-on estimer que l'identification que CHC fait du calcul sous-jacent à la validité logique fournit une intuition ? 2) Peut-on et devrions-nous entendre la certitude des jugements arithmétiques élémentaires de la forme $t_1=t_2$ de façon intuitive, ou, plus précisément, de quelle façon pouvons-nous considérer dans ce cas que l'évidence soit ajoutée à la preuve par une sémantique de la preuve ?

J'essaierai de répondre brièvement à ces deux questions, de deux manières très différentes.

Traitant d'abord la seconde, je reviendrai au débat entre Hegel et Kant, qui semble aujourd'hui étonnamment « moderne ».

Le point essentiel est que Hegel considère le jugement arithmétique 7+5=12 comme analytique, tandis que Kant le prenait comme exemple du jugement synthétique. Ce problème est intéressant dès lors qu'on se souvient que ce point de vue kantien fut universellement rejeté par l'épistémologie post-kantienne, principalement par la tradition analytique, mais également par les néo-kantiens.

Rappelons-nous l'analyse que Kant fait de ce jugement : selon lui, le sujet 7+5 y est prédiqué par la propriété « être 12 ». Mais il n'y a rien dans le concept du sujet, dans le concept de l'addition de 7 et de 5, qui envelopperait l'« être 12 ». Si nous souhaitons être convaincus de la vérité du jugement, nous devons construire les deux concepts, et constater intuitivement l'identité de nos constructions, laquelle entraîne l'identité intensionnelle au niveau des concepts, grâce à la valeur générique de la construction de concept. Conséquemment, le jugement est synthétique.

L'épistémologie post-kantienne, analytique ou néo-kantienne, objecte que 7+5=12 est une conséquence purement logique des axiomes de l'arithmétique de Peano. Pour l'épistémologie analytique initiale, cela signifie qu'on doit considérer 7+5=12 comme une vérité logique, ou du moins $PA \vdash 7+5=12$ l'est, mais, pour être honnête, cette épistémologie logiciste des mathématiques affirme plus généralement que toutes les parties de la connaissance mathématique sont de nature logique. Pour l'épistémologie néo-kantienne, la possibilité de dériver logiquement 7+5=12 prouve que la supposée intuition du temps n'est rien d'autre que des lois de l'*entendement* déguisées, mot kantien qui correspond à l'instance de la logique : il n'a jamais existé d'intuition pure du temps, la raison humaine n'a jamais directement affaire à son objet et à sa vérité, l'objet étant toujours produit et déterminé à la fois par la raison et par son cheminement fondamentalement logique (même si la figure de la logique, pour le néo-kantisme, n'est pas celle de Frege ni de Russell, mais plutôt une figure dynamique inspirée par Hegel).

Remarquons d'abord que l'objection classique n'a aucune force face à une épistémologie contemporaine d'esprit constructiviste. En effet, on peut prouver 7+5=12 dans PA, mais la preuve, appliquant autant de fois qu'il est nécessaire l'axiome $x+Sy=S(x+y)$, et conduisant progressivement de l'écriture du nom propre 7+5 à celle de

12, n’est rien d’autre que ce que Kant appelle construction de concept. *SSSSS0*, *SSSSSSS0*, et *SSSSSSSSSSSS0*, peuvent très bien être considérés comme la construction des concepts 5, 7 et 12 au sens kantien, dans la mesure où ils « projettent » et « réalisent » ces concepts dans un certain espace symbolique discret uni-dimensionnel, une version pertinente de l’intuition pure du temps. Et la preuve transforme, en effet, dans cet espace, *SSSSS0+SSSSSSS0* en *SSSSSSSSSSSS0*, ce qui correspond précisément à la monstration intuitive que Kant avait à l’esprit.

Mais oublions cette discussion, et retournons au point de vue hégélien, parfaitement rendu dans les citations suivantes :

> « Le 12 est donc un résultat de 5 et de 7 et d’une opération qui [est] déjà posée, [et qui] selon sa nature est également un faire tout extérieur, dépourvu-de-pensée, en sorte qu’une machine peut par conséquent aussi en avoir raison. Ici il n’y a pas le moins du monde de passage à un autre, c’est un simple acte de poursuivre, c’est-à-dire un acte-de-répéter la même opération [que celle] par quoi 5 et 7 ont surgi »[14].

> « Si le problème est que l’on doit additionner plusieurs nombres, la solution est : on les additionne ; la preuve montre que la solution est juste pour la raison qu’il était prescrit d’additionner et [que] l’on a additionné »[15].

Hegel soutient de deux manières que le jugement est analytique : premièrement, le jugement n’effectue pas un passage du même à l’autre, considérer 7+5 comme étant 12 c’est considérer à nouveau 5 et 7 tels qu’ils sont apparus ; deuxièmement, le contenu du jugement consiste seulement dans le fait que la règle de l’addition a été correctement suivie lorsque nous sommes passés de 5+7 à 12.

D’une certaine manière, avec ces deux remarques, Hegel interprète correctement 7+5=12 comme étant, en termes contemporains, une vérité constructive finie. D’un coté, l’être 12 de 7+5 ne peut être séparé de la définition constructive de 5 et de 7 ; de l’autre, le jugement ne fait qu’exprimer la légitimité de l’addition, qu’enveloppe l’axiomatique de Peano, mais que nous pouvons également constater au niveau algorithmique.

Ainsi, on comprend que le désaccord de Hegel avec Kant repose sur son approche computationelle des vérités arithmétiques élémentaires : elles surgissent comme résultats de processus algorithmiques et ne se réfèrent à aucun type d’intuition (pure). Leur discussion rejoint donc l’affaire contemporaine dont nous venons de nous occuper dans notre description des versions techniques de la sémantique des preuves. Cette discussion réactive également celle que nous avons développée dans la section « La construction relève du processus, et non de l’intuition ». Si on est favorable à l’interprétation computationnelle de la sémantique des preuves, alors on pense que l’algorithme, comme processus objectif, est ce qui se trouve derrière les énoncés élémentaires, aussi bien que derrière la structure de la preuve.

Dès lors, nous faisons de nouveau face à la réponse « computationnelle » aux deux questions précédemment soulevées : oui, dit cette réponse, CHC fournit la sémantique pour les preuves, car le contenu opératoire des preuves constitue pour elles une évidence, et cette sémantique est adéquate à la nature des jugements arithmétiques élémentaires, laquelle est également de l’ordre du calcul. Comme nous l’avons déjà dit, ce qui était appréhendé de façon imprécise comme construction, dans la première étape du développement contemporain, serait maintenant dévisagé plus scientifiquement comme calcul, qu’il soit codé sous forme de fonction récursive ou de lambda-terme. Et désormais, aucun propos relatif à l’intuition ne serait pertinent.

[14] Cf. Hegel, *Science de la logique*, §1715, [322].
[15] Cf. *Ibid.*, §1717, [323].

Pourtant, comme je l'ai soutenu dans la section concernant cette approche « computationnelle » de la construction, celle-ci ne rend pas compte de la valeur fondationnelle de la construction, et dès lors, ne nous apprend pas quel est le véritable statut de la preuve formelle. Nous pouvons, évidemment, estimer que l'évidence de 7+5=12 est fournie par l'application particulière de l'algorithme d'addition, qu'elle soit effectuée par la preuve formelle elle-même ou bien en dehors de tout formalisme. Mais on ne peut considérer cette évidence comme évidence que dans la mesure où la séquence d'étapes en cause est rassemblée comme séquence de nos actes ou gestes, que dans la mesure où nous avons une vision globale de ce que nous faisons, pendant que nous le faisons, que dans la mesure où nous effectuons une certaine intuition avec et dans notre calcul. L'idée initiale de Brouwer fut de nommer *constructions* ces séquences particulières d'actes qui, loin de constituer des étapes impersonnelles et mécaniques, résultent dans l'intuition et offrent un contenu intuitif. C'est seulement dans cette perspective qu'on peut considérer le calcul comme évidence. Si et lorsque le calcul ne renvoie pas à la construction, il est le nom d'un processus universellement possible qui n'a aucune valeur fondationnelle, il devient une sorte de contrepartie, dans le domaine constructif, des applications cantoriennes.

Ajoutons qu'en dernière instance, nous avons besoin d'avoir une vue d'ensemble des textes des programmes de notre ordinateur, ou de l'itinéraire de travail que nous anticipons pour eux, ou de l'exactitude de certains vérificateurs de spécifications, afin d'avoir confiance dans les calculs des ordinateurs. A un certain niveau, les gestes constructifs doivent se trouver sous la responsabilité d'un agent pour lequel ils sont en même temps posés comme intuition, si nous voulons que le système, dans son intégralité, jouisse d'une approbation rationnelle de la part de l'esprit scientifique, afin de susciter la confiance. Pour cette raison, nous maintenons que ce nous avons décrit comme sémantique des preuves doit être compris comme ce qui offre des outils techniques pour produire et apprécier l'évidence, qui, ajoutée à la preuve, fait de cette dernière une preuve mathématique complète au sens de Kant. On désigne d'abord ces outils de manière générale comme des constructions, puis on les identifie à des actions récursives codées par un entier, ensuite à des actes "algébriques" indiqués par des lambda-termes.

Tentons encore d'illustrer la fin de notre discussion grâce à un exemple issu de recherches récentes.

Comme on le sait, on a récemment étendu la correspondance de Curry-Howard à la logique classique. Suivant l'orientation suggérée par Felleisen et Griffin, Michel Parigot a conçu, dans son article de 1992[16] , un calcul étendu, le *lambda-mu-calcul*, qui permet de donner une version de la correspondance de Curry-Howard, qui fonctionne également pour la logique classique. Depuis, J.-L. Krivine a proposé une autre manière de présenter cette nouvelle correspondance, dans le langage de la « réalisation ». Il expose une théorie des assertions de la forme « t réalise X », où t est un terme du lambda-mu-calcul, et X une formule (de la logique du premier ordre, dans un de ses articles, de ZF dans un autre[17]). Pour ces assertions, nous disposons des propriétés attendues pour toute notion de réalisation (en résumé : les théorèmes sont réalisables, et ce qui est réalisable est un théorème).

[16] Cf. Parigot, M., 1992, « λμ-calculus : an Algorithmic Interpretation of Classical Natural Deduction », dans Proceedings of International Conference on Logic Programming and Automated Deduction, volume 624 des Lecture Notes in Computer Science, Springer, 190-201.

[17] Cf. Krivine, J-L, « Type lambda-calculus in Classical Zermelo-Fraenkel Set Theory", disponible sur internet.

Ainsi, cet ajout à la correspondance de Curry-Howard traditionnelle permet-il d'accorder un contenu computationnel aux inférences logiques typiquement « classiques ». Par exemple, on apprend quel calcul correspond au théorème $\neg\neg X \rightarrow X$ de la déduction naturelle (à sa preuve). Je dois avouer que jusqu'ici, je ne comprends ni ne maîtrise entièrement, du moins autant que je le souhaiterais, aussi bien au niveau philosophique que technique, cette nouvelle couche de la correspondance. Mais il me semble que le problème de cette extension consiste dans le fait que la contrepartie computationnelle des gestes typiquement classiques ne devient jamais vraiment « intuitive », elle ne nous semble pas refléter les inférences logiques, telle une partie superposée du processus conduisant à des résultats constructifs offerts à la contemplation, qui fournirait l'évidence pour les preuves classiques. Je suis tout à fait conscient du fait que je peux me tromper sur ce point, à cause de mon insuffisante pénétration des nouvelles théories. Mais, me tenant au niveau de ma compréhension, j'ai le sentiment que ce manque de contenu intuitif des contreparties fournies par la correspondance de Curry-Howard étendue est le reflet du caractère non-constructif de la logique classique, exprime le fait que CHC, appliquée à la logique classique, n'« ajoute pas l'évidence à la preuve » de la même manière.

Les mots de la fin

Ainsi que je l'ai dit au tout début, cet article défend l'idée que les perspectives tirées de la philosophie allemande classique peuvent être utiles à qui souhaite écrire une philosophie de la logique réellement instructive, essayant d'accompagner les développements contemporains, sans être soumis à l'avance à la logique comme ce qui fournit toujours le seul critère et la seule clarté vis-à-vis de tout. A qui pense que la philosophie de la logique n'est pas la logique de la logique, et juge que la logique, à l'instar des mathématiques, exige une appréciation réellement philosophique.

Si j'ai raison, le prix que nous avons à payer pour cela consiste donc à reconsidérer l'exclusion quasi-politique de la tradition continentale survenue dans le contexte de la philosophie analytique au début du 20^{e} siècle, à être prêt à étudier ses textes et ses pensées sans les considérer *a priori* comme obsolètes. L'épistémologie internationale peut-elle se permettre de payer un tel prix ?