Sens et nouveauté de la démonstration

Jean-Michel Salanskis,
Professeur de Philosophie des Sciences, Logique et Épistémologie ;
Université Paris X Nanterre, Département de Philosophie
200, avenue de la République 92001 Nanterre cedex
e-mail : jmsalans@u-paris10.fr

March 6, 2005

Conformément à l'annonce que j'en ai donné, le but de cette conférence est de réfléchir sur ce que la vision contemporaine de la démonstration a d'essentiellement nouveau par rapport à une certaine entente philosophique, qui tiendra ici le rôle de la référence traditionnelle. Si, dans mon titre, je parle aussi du *sens* de la démonstration, c'est bien entendu, parce que je conjecture que l'événement contemporain touche à la signification même du mot *démonstration* : je fais l'hypothèse que les conventions contemporaines, les nouveaux usages et les nouvelles perspectives préfigurent au moins une nouvelle interprétation de ce qui depuis les Grecs reçoit le nom de démonstration.

La démarche suivie consiste simplement à se livrer successivement à l'examen de deux types de sources ou de documents.

D'abord, je me pencherai sur la compréhension philosophique de la démonstration qu'a pu proposer le courant "phéno-transcendantal", le seul à vrai dire dont je puisse exciper d'une connaissance suffisante : je désigne ainsi les philosophes de la filiation kantienne et post-kantienne, les allemands de Kant à Heidegger essentiellement. Comme on le verra dans les pages qui viennent, cela ne me gêne pas d'intégrer à ce courant les auteurs de l'"idéalisme allemand".

Dans un deuxième temps, je prendrai en considération la conception de la démonstration qui émane de la logique mathématique moderne. Elle motive une branche de la logique contemporaine – la théorie de la démonstration – dont la paternité est généralement attribuée à Hilbert. Après Hilbert, les apports constituants de la branche sont ceux de Gentzen et Prawitz. Ce renouvellement est donc, à vrai dire, déjà une affaire ancienne. J'essaierai, en revenant sur lui pour tenter de caractériser la rupture qu'il a introduite, de tenir compte de développements plus récents de la théorie de la démonstration : essentiellement, de la "correspondance de Curry-Howard", et des notions directrices qui vont avec.

En tout état de cause, mon évocation de la réappropriation technique de la notion de démonstration dans l'aire logico-mathématique ne sera pas elle-même technique. J'essaierai de la comprendre dans des termes philosophiques généraux, de la même sorte que ceux qui interviendront naturellement dans ma présentation de la compréhension phéno-transcendantale.

Mon espoir est, au bout de cette étude, de conquérir une vision plus englobante, plus intégratrice, de cela qui est pensé depuis fort longtemps désormais sous le mot démonstration, en profitant de tout ce qui aura été rencontré et réfléchi au fur et à mesure. Mais aussi, sans doute, de mieux apprécier l'hétérogénéité des éléments "nouveaux" qui auront été interrogés.

Je commence donc par revenir, en tâchant de viser à l'essentiel, sur quelques textes ou thèmes de Kant, Hegel et Husserl.

1 Compréhension philosophique de référence de la démonstration

1.1 Démonstration, construction et démarcation (chez Kant)

Kant dit quelques mots de la démonstration dans la *Discipline de la raison pure dans l'usage dogmatique*. Il n'est pas permis, si l'on veut comprendre, d'ignorer ce qui est le contexte de ce passage[1] : Kant y expose et y argumente la démarcation entre philosophie et mathématiques au nom du critère de la *construction de concepts*. La philosophie est la connaissance rationnelle par concepts et la mathématique la connaissance rationnelle par construction de concepts, comme on le sait. Ce qui est dit de la démonstration est dit à la fin d'une énumération à trois termes (définitions, axiomes, démonstrations) visant les démarches spécifiques de la mathématique non récupérables dans l'enceinte de la philosophie. Conformément à la vision encadrante de Kant, c'est à chaque fois le critère de la construction de concepts qui ruine la possibilité d'un usage philosophique de la voie mathématique envisagée.

La *définition* au sens mathématique est impossible en philosophie parce que toute la valeur déontologique de la définition mathématique résulte de ce qu'elle institue le concept. La définition est déjà construction, non pas au sens précis de la construction de concept chez Kant, mais au sens de la prescription d'un contenu conceptuel par le vouloir rationnel de la mathématique. La philosophie en revanche élabore des concepts donnés, elle les analyse et tente de déterminer la somme de traits en lesquels se résoudrait le concept tel qu'il est communément compris, analyse toujours douteuse et rectifiable selon Kant, qui ressemble fort à ce qu'on appelle une interprétation[2].

L'*axiome* au sens mathématique est l'affirmation d'une évidence comme primitive de la pensée (mathématique). Elle est en surface un jugement, une synthèse de concepts : seulement l'unification de cette synthèse est autosuffisante, ne renvoie pas à un troisième terme qui éclairerait l'union des synthétisés. Cela n'est possible que parce que les concepts "montrent" leur liaison dans l'intuition où ils sont construits : or il en va seulement ainsi dans le champ mathématique, précisément. Donc, Kant considère l'axiome comme la reprise judicative d'une évidence acquise dans la construction de concepts.

La *démonstration* est également décrite par Kant comme une démarche propre à la mathématique. Soyons attentifs à l'argumentation qu'il donne, puisque c'est de

[1]. Kant, E., *Critique de la raison pure*, trad. Tremesaygues-Pacaud, Paris, PUF, 1971, p. 493-507 ; Pléiade, vol. I, 1294-1316 ; A708-738, B736-766.

[2]. Cf. à ce sujet Salanskis (1997).

notre objet en personne qu'il s'agit cette fois. La démonstration est implicitement définie comme une " preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive[3] " . Une preuve philosophique peut atteindre l'apodicticité, mais pas l'intuitivité :

> " Mais la certitude intuitive (*anschauende*), c'est-à-dire l'évidence, ne peut jamais résulter de concepts a priori (dans la connaissance discursive), quelque apodictiquement certain que puisse être, par ailleurs, le jugement "[4] .

Donc, Kant choisit de concevoir la démonstration comme cela même qui administre la certitude en l'attestant sur l'objet, ce qui ne se peut que si l'objet n'est pas affecté du défaut d'empiricité en quelque sorte, c'est-à-dire s'il a la qualité de *généricité* que lui confère le fait d'être une construction de concept :

> " Aussi donnerais-je plus volontiers aux preuves philosophiques le nom de preuves *acroamatiques* (discursives), parce qu'elles ne peuvent être faites que par de simples mots (par l'objet en pensée), plutôt que celui de *démonstrations*, puisque ces dernières, comme déjà l'expression l'indique, pénètrent dans l'intuition de l'objet [5]".

La démonstration, donc, est une notion mathématique plutôt qu'une notion logico-linguistique, la mathématique étant définie dans sa distinction d'avec la logique comme doctrine de l'intuition pure, et trouvant dans la construction de concepts le mode méthodologique qui correspond à cette distinctivité.

Kant voit bien qu'une objection peut être faite en s'appuyant sur les aspects algébriques de la mathématique, spontanément proches d'une discursivité conventionnelle (proximité que va souligner à l'envi le point de vue moderne). Il revendique pour les démonstrations littérales-algébriques aussi, néanmoins, l'intuitivité de la construction de concepts :

> " La méthode algébrique elle-même avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas sans doute une construction géométrique, est cependant une construction caractéristique où, à l'aide de signes, on représente les concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des quantités et où, sans même envisager le côté heuristique, tous les raisonnements sont garantis contre l'erreur par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux "[6].

Ce texte capital est étonnamment moderne, d'une part en ce qu'il réfute par avance la thèse illusoire de la non-intuitivité des mathématiques formelles-symboliques, d'autre part en ce qu'il esquisse le problème tout à fait actuel du rapport entre preuve et calcul.

Il nous est donc confirmé, dans l'approche même de l'apparent contre-exemple, que Kant voit dans l'attestation objective rendue possible par la construction de concept le

[3]. *Ibid.*, 505 ; Pléiade, vol. I, 1313 ; A734, B762.
[4]. *Ibid.*, 505 ; Pléiade, vol. I, 1313 ; A734, B762.
[5]. *Ibid.*, 505 ; Pléiade, vol. I, 1313 ; A735, B763.
[6]. *Ibid.*, 505 ; Pléiade, vol. I, 1313 ; A734, B762.

propre de la démonstration. La démonstration est *monstration*, et donc elle est tout autre chose que la preuve logique, qui serait plutôt le lot de la philosophie.

Faisons deux remarques sur ce dispositif kantien :

1) il laisse dans l'ombre la "temporalité" de la démonstration ;

2) il est une sorte d'opérateur méta-philosophique rendant compte de toute la démarche de la *Critique de la raison pure* (critique de la métaphysique dogmatique et spécificité de l'argument transcendantal).

Pour ce qui est du premier point, il résulte de l'insistance sur l'évidence et la généricité : ce qui fait la démonstration mathématique une démonstration est qu'elle emploie des singuliers qui sont des concepts construits et donc qu'elle procure une évidence spécifique aux prédications qui s'imposent en elle (au cours d'elle). Mais la séquentialité des assertions et le mode de connexion et d'engendrement qui lui correspond ne sont pas en cause : cette séquentialité, pour autant qu'on puisse la définir ou qu'il soit intéressant de le faire, appartient tout aussi bien aux preuves acroamatiques de la philosophie. Il y a donc chez Kant, de façon cohérente avec sa démarcation de la logique et des mathématiques, séparation complète entre la mathématicité des démonstrations et le type de temporalité discursive qui, selon notre concept moderne, les caractérise.

Pour ce qui est du second point, il suffira de se souvenir de l'argument anti-métaphysique kantien : selon lui, les métaphysiques qui ont précédé son criticisme avaient le tort de croire progresser dans la connaissance aux moyens de preuves acroamatiques, d'imaginer qu'elles ajoutaient des déterminations à un concept au moyen d'un jugement synthétique *via* de telles preuves. Mais, pour qui connaît la démonstration mathématique dans ce qui lui est essentiel, et qui en fait le type de toute acte synthétique au sens kantien, il est clair que les preuves acroamatiques ne sont que des reformulations, des jugements analytiques, et donc ne permettent pas de capter la moindre nouveauté déterminative. Il semblerait donc que Kant ait par avance rangé notre notion de preuve formelle dans le cul-de-sac de l'analyticité, et décrété sa non-convenance aux mathématiques. Mais nous devons tout de même nous méfier de ce jugement, parce que, d'un autre côté, nous avons vu que Kant anticipe le "travail dans le symbolique" comme cas de la construction de concept. Restons donc prudents sur ce sujet, il y a quelque probabilité que nos démonstrations formelles ne soient après tout pas la même chose que ses preuves acroamatiques.

Abordons maintenant un second enseignement sur la démonstration, celui de Hegel. Il est d'autant plus pertinent d'y venir maintenant que son élaboration de la question est largement réactive vis-à-vis de celle de Kant.

1.2 Le théorème dans la *Science de la logique* (chez Hegel)

Hegel aborde les figures ou tropes spécifiques de la mathématique – la définition, la division et le théorème – dans le chapitre *Le connaître synthétique* de la section *L'idée du vrai* du troisième livre de la *Science de la logique*[7]. On est donc tout au bout du cheminement qui conduit, à travers les trois livres de ce traité monumental, à l'idée absolue.

[7]. Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, La logique subjective ou doctrine du concept*, trad. P.-J. Labarrière et G. Jarckyk, Paris, Aubier Montaigne, 1981, p. 315-358.

Autant dire que les mathématiques reçoivent, dans l'élaboration dialectique du thème logique, un statut comparable à celui de la religion ou de l'art dans la *Phénoménologie de l'esprit* : elles sont prises comme des accomplissement unilatéraux proches de la totalité, de l'*Erinnerung*.

Ajoutons à cela que la motivation de la rubrique *Le connaître synthétique* s'accorde aux thèses kantiennes que nous venons de rappeler : il s'agit bien, sous ce nom, d'évoquer les aspects de la mathématique qui échappent à quelque chose comme une réduction logicienne. La rubrique s'oppose à celle titrée *Le connaître analytique*, qui la précède, et qui correspond à une figure de l'idée connaissante plus enfermée dans la non-vérité de la finité, plus du côté de l"entendement" kantien et moins du côté du "bon" concept hégélien.

Mais la divergence apparaît aussitôt dans ce que Hegel considère comme l'exemple type du connaître analytique, à savoir les jugements arithmétiques finitaires (du type 7+5=12), pour les nommer comme nous le ferions aujourd'hui : ces jugements, pour Kant, étaient les exemples *princeps* de jugements mathématiques synthétiques.

Essayons ce comprendre ce qui motive ce "revirement" philosophique d'un auteur à l'autre.

1.2.1 Le connaître analytique : anticipation hégélienne de la figure du constructivisme

Tout d'abord, attestons le fait de ce revirement par une citation dépourvue d'ambiguïté :

> " On sait que l'*arithmétique* et les sciences plus universelles *de la grandeur discrète* se trouvent nommées par excellence *science analytique et analyse*[8] ".

Pour Hegel, le "connaître analytique" prend les nombres entiers comme extériorité juxtaposée-indifférente, se posant comme étrangère à la détermination conceptuelle, qui ne pourrait donc lui revenir que du dehors et pas au titre d'un "passage" se jouant en elle : (le matériau arithmétique est)

> " (...) quelque chose de déjà fait de façon tout abstraite et indéterminée, en quoi toute caractéristique de relation est supprimée, à quoi toute détermination et liaison est quelque chose d'extérieur[9] ".

Hegel rapporte d'ailleurs cette conception du nombre entier à sa genèse itérative, à ce que j'appelle pour mon compte sa participation à l'objectivité constructive[10]. Les nombres entiers, en effet, sont vus par lui[11] comme résultant d'un "augmenter" extérieur du *Un* jusqu'au *nombre numéré*, augmenter qui en reste essentiellement à l'atomicité du *Un* (ne la transgresse pas : c'est bien la discrétion qui est en cause).

8. *Ibid.*, 324.
9. *Ibid.*, 324.
10. Cf. Salanskis (1995, 1999).
11. Cf. Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique*, *L'Être*, trad. P.-J. Labarrière et G. Jarckyk, Paris, Aubier Montaigne, 1972, 161-201, spécialement 189-201.

Du coup, les déterminations qui sont dicibles du nombre sont contingentes-subjectives, comme chaque nombre en tant que limitation arbitraire de l'augmenter.

Hegel envisage dans cette ligne, d'une façon qui me semble mathématiquement très pertinente, les jugements élémentaires de l'arithmétique finitaire : il les décrit comme réduction de l'inégal à l'égal, et voit leur dépendance essentielle sur un *faire*[12]. C'est à cet endroit qu'il prend en charge, pour en inverser l'évaluation, le 7+5=12 de Kant. Selon lui, dans 7+5=12,

> " (...) il n'y a pas le moins du monde de passage à un *autre* ; c'est un simple acte-de-poursuivre, c'est-à-dire [un] *acte-de-répéter* la même opération [que celle] par quoi 5 et 7 ont surgi "[13].

D'où il résulte que le ressort de l'effectuation du connaître de l'égalité est le *faire*, purement et simplement :

> " Si le problème est que l'on doit additionner plusieurs nombres, la solution est : on les additionne ; la preuve montre que la solution est juste, pour la raison qu'il était prescrit d'additionner et [que] l'on a additionné "[14].

Ainsi donc, dans le contexte de ce qu'il appelle *connaître analytique*, Hegel conçoit ce que nous appellerions aujourd'hui une certaine indistinction de la preuve et de l'algorithme. De plus, il énonce aussi fort clairement qu'un tel contexte est toujours celui d'une *prescription*, il équivaut à l'incidence éprouvée d'une prescription. Ce qui n'est pas considéré ou thématisé par lui, c'est que les algorithmes se résolvent en prescriptions, sont des listes de prescriptions élémentaires, conventionnellement effectuables et non ambiguës : dans le passage cité, l'addition comme algorithme n'est pas décrite sous cet angle, plus exactement le fait que l'addition soit un algorithme en ce sens précis n'est pas mentionné comme faisant partie de l'essence du prouver analytique.

Mais il est très important, bien sûr, que Hegel mette un tel prouver en rapport avec le type d'objectivité dont on s'occupe en l'occurrence, et que je crois pouvoir caractériser comme le type de l'objectivité constructive.

Dernier élément à citer dans le cadre de cette évocation du propos hégélien sur le connaître analytique, où, nous l'avons vu, Hegel aborde déjà sans le dire la notion de démonstration : c'est la manière dont Hegel conçoit la limite de ce connaître analytique. Il l'égale à une limite *dans* la mathématique, entre ce qui engage à chercher et obtenir uniquement des déterminations déjà incluses dans le problème et ce qui invite à excéder ce "champ du problème" :

> " l'analyse devient synthétique dans la mesure où elle en vient à *des déterminations* qui ne sont plus *posées* par les problèmes eux-mêmes "[15].

[12]. Bien que ce ne soit pas homogène aux citations qui suivent, on peut penser, pour ilustrer cettte vision hégélienne, aux égalités du lambda-calcul qui expriment des *réductions.*

[13]. Cf. Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, La logique subjective ou doctrine du concept*, 325.

[14]. *Ibid.*, 326.

[15]. *Ibid.*, 328.

Les exemples qu'il prend sont assez parlants : le calcul de la somme des puissances des racines d'une équation, la résolution trigonométrique de $x^m = 1$ par Gauss, et le calcul différentiel. Le premier cas est le plus surprenant pour nous, il nous semble algébrique et algorithmique, et donc plutôt du côté "analytique", mais Hegel, sans doute, est sensible au fait que le calcul en question porte sur des entités qui ne sont pas prises en vues individuellement, saisies, tenues et considérées comme déjà là (les n racines d'un polynôme général) : je peux, en effet, calculer la somme des racines d'un polynôme par exemple même si je suis incapable d'expliciter algébriquement ces racines (par rapport aux coefficients). Le second cas se comprend de la même façon : les racines exhibées en termes de module et d'argument complexes sont listées et décrites sans être pour autant repérées et contrôlées comme des entiers, il y a quelque chose de "schématique" dans la désignation qu'on en donne. Le troisième cas correspond à ceci que, pour Hegel, dx est un désignateur de concept, dénué de référent "analytique". Le point commun entre ces exemples est donc la "perte d'individualité" de l'objet manipulé, liée par Hegel à l'option de s'aventurer au-delà de l'espace du problème (sans doute définissable comme l'ensemble de ce qui est individuellement saisissable dans une situation mathématique donnée).

Le propos de Hegel rencontre de façon remarquable l'évaluation de Lachterman sur le "constructivisme" de la mathématique cartésienne, où il voit le patron du modernisme et de son élan vers la liberté et l'auto-création. Pour Lachterman, ce constructivisme se définit par la volonté de résoudre les problèmes sans sortir de l'espace de ces problèmes, sans s'autoriser à les "transcender", et à la volonté corrélative de toujours savoir où l'on en est du processus d'analyse dans lequel on est engagé selon la mathesis, à ne pas se laisser perdre et égarer dans le réseau de ses actes et représentation. Comme je l'ai dit dans *Le constructivisme non standard*, cette figure du constructivisme coïncide pour l'essentiel avec celle du constructivisme fondationnel contemporain, du moins si elle est bien comprise[16].

1.2.2 Le connaître synthétique : répétition divergente de Kant

Hegel, donc, semble nommer *connaître synthétique* cette part de la connaissance mathématique qui excède son "constructivisme" au sens de Lachterman. Mais il doit aussi, suivant l'exigence caractéristique de sa démarche, décrire l'enchaînement du connaître synthétique sur le connaître analytique selon la dialectique de l'idée du connaître. Le passage consiste en ceci que l'identité-du-différencié qui se dégage selon le progrès du connaître analytique (par l'acte algorithmique qui ramène l'inégal à l'égal je suppose) est *reprise par le concept*, en sorte que

> " la *connexion* elle aussi [doit] se trouver posée par lui et identique à lui "[17].

Au départ, cette reprise a lieu de la façon suivante : les déterminations développées par le connaître seront conceptuelles et *conçues* comme telles, saisies dans l'unité du concept. Donc le connaître dégagera constamment la *nécessité* des déterminations par

[16]. Cf. Salanskis [1999] et Lachterman, D.R., *The Ethics of Geometry*, London, Routledge, 1989, 159-160.
[17]. CF. Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, La logique subjective ou doctrine du concept*, 328.

lesquelles il connaît, mais cette nécessité ne sera pas la nécessité subjective du concept, on en restera à l'application au particulier de la forme conceptuelle, et à un renvoi de la nécessité à l'être-autre à quoi elle s'applique, de qui elle se dit.

En d'autres termes, la différence entre le connaître analytique et le connaître synthétique réside simplement dans le fait que la nécessité et son mouvement sont prises en compte, ce qui est un "retour" du connaître dans le concept, mais pas dans le *pour soi* du concept, puisque cette nécessité est pour le moment projetée depuis le concept dans son extérieur. Sur le plan mathématique, le connaître synthétique correspond aux figures de la *définition*, la *division* et du *théorème*. Seule la troisième nous concerne véritablement ici, mais il est prudent, étant donnée la nature systématique de la pensée hégélienne, de suivre pas à pas son propos. Remarquons pour commencer que la proximité de ce propos avec la méthodologie kantienne est évidente, la seule variante nominale introduite étant le remplacement de l'*axiome* par la *division*.

La *définition* est, pour Hegel, la démarche de poser l'objet – idéalement dans sa singularité – en termes de sa différence spécifique dans un genre. Cette démarche échoue parce que la singularité est, à ce stade, extérieure au concept, donc la particularisation de celui-ci échoue à la cerner. À vrai dire, on est même dans l'incapacité de déterminer ce qui tombe sous la particularité du concept et ce qui, comme singularité résiduelle, échappe à cette particularisation :

> " Puisque la singularité, [entendue] comme l'être-déterminé en et pour soi, se trouve en dehors de la détermination-conceptuelle caractéristique du connaître synthétique, il n'y a en effet aucun principe [qui permette de décider] quels côtés de l'objet on doit regarder comme appartenant à sa détermination conceptuelle et lesquels seulement à sa réalité extérieure "[18].

Cette impossibilité de soumettre la chose singulière à la logique essentialiste ne ruine pas la démarche définitionnelle dans le cas des objets géométriques et des objets de la volonté pratique. Il y a unité de ces deux "contre-exemples", parce que les objets y sont ce qu'ils *doivent* être, ils sont pris dans une perspective pratique, et, de ce point de vue, Hegel semble près d'une conception formaliste moderne des mathématiques.

Mais il faut voir comment Hegel envisage le cas géométrique, il y a en l'occurrence l'esquisse d'une pensée de la mathématique qui nous importe. Pour lui, c'est l'abstraction de l'espace absolu, ôtant toute sa richesse singulière à l'objet, qui le réduit à quelque chose de "décidé" (dessiné=décidé) dans cet abstrait, à une *figure*. Les figures en effet,

> " (...) sont par conséquent essentiellement ce qu'elles doivent être ; leur détermination-conceptuelle en général, et plus précisément la différence spécifique a en elles sa réalité simple inentravée ; elles sont dans cette mesure la même chose que les produits de la finalité extérieure (...) "[19].

Remarquons donc que Hegel suit d'assez près la conception kantienne de la définition. Comme pour Kant, la définition est liée à la mathématique en tant que position libre de l'objet. Mais, alors que Kant insiste sur l'adéquation de l'objet à sa

18. *Ibid.*, 331.
19. *Ibid.* 3, 332.

définition, sûre *a priori* dans la mathématique, Hegel souligne le fait que l'abstraction de l'espace absolu, rendant possible la *définition* en ce sens, n'épuise pas l'espace, celui-ci garde une épaisseur conceptuelle que le connaître synthétique mathématique ne peut par principe saisir. La définition géométrique est maîtresse de ce qu'elle définit, mais pas de l'espace. Hegel identifie l'excès "conceptuel" (selon sa terminologie) de l'espace, dans ce texte comme dans d'autres, comme sa continuité, son infinie divisibilité et sa dimensionnalité.

Le résultat de l'échec de la démarche de définition, hors les cas d'exception, est que le concept se fie à l'empirique pour décider l'essentialité. Le connaître se contente d'enregistrer des marques distinctives de l'objet, marques extérieures et non ramenables à un engendrement conceptuel :

> " L'acte-de-définir renonce par conséquent aussi de soi à des déterminations conceptuelles proprement dites, qui seraient essentiellement les principes des objets, et se contente de *marques-distinctives*, c'est-à-dire de déterminations chez lesquelles l'*essentialité* est indifférente pour l'objet lui-même, et qui plutôt n'ont que la fin d'être *des signes distinctifs* pour une réflexion extérieure "[20].

Voué de la sorte à cette tâche de compilation des caractères, le connaître est renvoyé à la systématique de cette activité, à l'arborescence des déterminations qu'il attribue. Il vise à la simplicité, l'abstraction, l'universalité de son catalogue, et se subjective ainsi en ce sens qu'il se soumet à un intérêt propre du connaître (cette idée fait penser au rôle régulateur de l'idée selon Kant dans l'appendice de la dialectique transcendantale) :

> " Mais en tant que l'on doit *connaître*, la comparaison avec l'*intuition* est déjà décidée et abandonnée ; il peut seulement y avoir la question, qu'est-ce qui *à l'intérieur du connaître* [doit être] le premier, et comment la suite doit être agencée ; ce que l'on réclame, ce n'est plus un [cheminement] *conforme-à-la-nature*, mais un cheminement *conforme-à-la-connaissance*. Si l'on interroge simplement sur la *facilité*, il est clair de soi, en tout état de cause, qu'il est plus facile au connaître de saisir la détermination-de-pensée abstraite simple que le concret, qui est une liaison multiple de telles déterminations de pensée et de leurs relations (...)"[21].

Deux des exemples que prend Hegel de cet intérêt du connaître pour ses catégories nous intéressent : d'une part, il évoque le fait que, dans l'apprentissage de la lecture, on commence par les phonèmes/graphèmes abstraits en lesquels se résout le mot, d'autre part, il fait état de la démarche géométrique, où l'on commence par le point, la ligne, et les figures les plus simples et les plus générales. Le connaître synthétique opérant selon la division, donc, est pour lui éminemment le connaître formel, grammatical, voire déductif, bien que, en principe, nous n'en soyons pas encore au théorème.

Pour y venir justement, il faut que se pose le problème des fondements de division dans toute son acuité. L'arborescence du connaître de la division ne roule pas sur des définitions ayant capturé la singularité, donc ses catégorisations ne sont jamais

[20]. *Ibid.*, 334.
[21]. *Ibid.*, 337.

sûrement légitimes, et toujours susceptibles d'être remises en cause par un cas singulier intermédiaire ou contradictoire. À cet endroit, Hegel montre peut-être qu'il aperçoit l'abîme du "paradoxe de Wittgenstein" selon Kripke, celui de l'ouverture infinie et la non-résolubilité critérielle des classes et règles infinies du langage[22].

On passe donc au *théorème*, qui dépasse ce moment aporétique en internalisant la singularité. *Définition* et *division* sont la connaissance synthétique en tant que synthèse du "trouvé déjà-là" et de la forme conceptuelle selon l'universel et le particulier ; le théorème est le moment où les relations de détermination conceptuelle "restituent" la singularité de l'objet, ce qui est une œuvre éminemment synthétique au sens kantien, puisqu'elle est l'adjonction d'un autre à (partir de) soi (sauf qu'il ne reste pas ultimement autre, on le sait). Il faut une preuve, une attestation conceptuelle de la nécessité de ce passage, de cette restitution. Selon le principe de la "retombée juste après la conquête", omnivalent en dialectique hégélienne bien que non thématisé il me semble – principe par lequel, à mon avis, passe d'ailleurs éminemment le caractère *pensant*, "non trivial", de ce discours dialectique – l'administration théorématique de cette nécessité aura cours encore et toujours dans l'extériorité, celle des termes du connaître, et pas de façon purement et proprement subjective[23]. C'est ainsi que Hegel comprend l'*évidence* de la preuve mathématique, sur laquelle, on l'a vu, Kant insiste : elle est la nécessité se montrant *dans l'unité des termes du connaître* d'une restitution de la singularité qui est imputable au concept mais que celui-ci ne produit pas subjectivement :

> " (...) dans la singularité, le concept est passé à *l'être-autre*, à la réalité, par quoi il devient idée. La synthèse qui est contenue dans le théorème n'a donc plus pour sa justification la forme du concept ; elle est une liaison comme de [*termes*]-*divers* : l'unité non encore posée par là est par conséquent seulement alors à mettre en évidence, le prouver devient donc ici nécessaire à ce connaître lui-même "[24].

Commentant l'ethos de la preuve en mathématique, Hegel commence par dire que la notion d'évidence roule sur une notion d'immédiateté qui n'est pas satisfaisante, parce que subjective au mauvais sens de l'unilatéral et de l'arbitraire : l'axiome est seulement ce qu'on *accepte* de présupposer.

Cela ne signifie pas, pour autant, que Hegel assume la vision d'un ensemble d'énoncés ou de formules participant à titre égal à la vérité au titre de leur connexion déductive. Il y a bien, pour lui, un *processus* de la vérité dans le texte démonstratif, qu'il décrit en substance comme suit (en pensant à la géométrie) :

1. saisie "formelle" de l'objet dans les définitions ;

[22]. Cf. Kripke, S., *Wittgenstein : on rules and private langages*, Oxford : Blackwell, 1982.

[23]. Lors du passage au connaître synthétique, le même discours est tenu. À ce moment, néanmoins, la nécessité est appelée à se couler dans l'externalité de la forme du *jugement*, du rapport de l'*universel* et du *particulier*, comme on le sait dans l'après-coup. Attendons donc la fin du développement sur le théorème pour identifier la différence du type d'externalité qui supplée à la nécessité du concept dans cet ultime moment de la dialectique du connaître synthétique. *A priori*, ce qui importe est justement l'entrée en jeu conjointe et solidaire de la *singularité* et de *l'évidence*.

[24]. Cf. Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, La logique subjective ou doctrine du concept*, 344.

2. articulation purement logique des déterminations saisies (“ théorèmes du commencement ”) ;

3. sortie vers la singularité dans le théorème (=accès au *vrai*).

L’exemple princeps est celui de la géométrie d’Euclide, où les cas d’égalité correspondent au moment 2), et le théorème de Pythagore au moment 3), parce qu’il enferme dans la signification purement conceptuelle d’une équation la restitution du triangle paradigmatique. Selon Hegel, le moment 3) habite en fait déjà le moment 2), comme en témoigne le fait que la preuve des cas d’égalité dégage cet élément de connaissance “restitutif” que le concept d’un angle avec ses deux côtés adjacents suffit à poser le triangle.

La vision de Hegel, en substance, est celle d’une démonstrativité mathématique orientée vers la “détermination complète” d’un objet, ce qu’on peut à vrai dire envisager comme un trait moderne. Il conçoit les démonstrations comme partagées, en quelque sorte, entre

- un fonctionnement interne qui est un arrangement strictement logique, mais qui, en même temps et du même coup, capture le sensible (et cet aspect est relevé par Hegel dans son exemple des cas d’égalité des triangles) ;

- et un *telos* de la sortie vers la singularité pour sa restitution, qui, notons-le, advient dans l’exemple via un passage à la détermination numérique, nous engageant en fait déjà dans les “dictionnaires” analytiques-ensemblistes contemporains.

Cependant, pour Hegel, cette conceptualité de la restitution du singulier dans la démonstration est une mauvaise médiation de l’universel et du singulier, une médiation faible, à cause du passage par la “construction”, magnifié par Kant comme trait de l’intelligence mathématique : l’unité des déterminations synthétisées paraît redevable de la mise en exergue de certaines déterminations “construites”, et donc ne procède pas de la nécessité du concept. Hegel remonte, fort pertinemment, à l’espace intuitif dans cette critique philosophique. Malgré la sublimité de l’abstraction de l’espace, comme il l’a déjà dit, elle piège encore le concept dans un sensible indépassable :

> “ (...) l’objet abstrait est encore l’*espace*, – quelque chose de non *sensiblement sensible* : l’*intuition* est élevée dans son abstraction, il est une *forme* de l’intuition, mais est encore intuition, – un sensible, l’*extériorité-réciproque* de la sensibilité elle-même ; sa pure *absence de concept* ”[25].

D’où une sorte de blocage finitaire du jeu des déterminations des figures dans l’espace :

> “ Du fait que l’espace de la géométrie est l’abstraction et le vide de l’être-en-extériorité-réciproque, il est seulement possible que les figurations se trouvent de telle sorte introduites dans son indéterminité que leurs

[25]. *Ibid.*, 352.

> déterminations demeurent en dehors l'une de l'autre en repos fixe, et n'aient dans soi aucun passage dans l'opposé "[26].

Dans cette perspective, les figures sont comme les nombres entiers pour le connaître analytique, d'où mon adjectif *finitaire*.

Pour nous résumer, le fait même que la démonstrativité mathématique reste saisie dans le sensible – fût-il le sensible abstrait de l'intuition de l'espace et permît-il la construction des déterminations – empêche le véritable procès conceptuel de la restitution de la singularité, que les théorèmes selon leur *telos* accomplissent néanmoins dans la méconnaissance. D'où un retour de Hegel sur la méthodologie kantienne. La philosophie doit effectivement se détourner de la démonstrativité mathématique, mais c'est pour les raisons de Jacobi et pas pour celles de Kant[27] : c'est parce que cette démonstrativité n'est pas vraiment conceptuelle, et pas parce que son application à la philosophie produit seulement des antinomies ; ces dernières sont bien au contraire l'indice du " concept libre infini " dont la philosophie a besoin.

Justement, le procès dialectique conduit de la "faillite" restitutive du théorème à la figure d'une nécessité du concept qui se manifeste comme auto-détermination (se détournant de toute construction dans le sensible) : il s'agit alors de la figure de l'*idée pratique*.

Donc Hegel décrit la mathématique d'un bout à l'autre, de la connaissance analytique au théorème, comme prise entre le sensible et la prescription, et la fait sortir vers la liberté et le registre pratique, finalement, pour la promotion dialectique de l'idée.

Pour ce qui concerne la démonstration, nous avons rencontré essentiellement deux enseignements chez lui :

- celui d'une démonstration du connaître analytique qui est englué dans l'extériorité imprenable de son objectivité de type arithmétique, et qui coïncide avec le faire algorithmique (comme telle, elle apporte une unité complètement extérieure au concept) ;

- celui d'une démonstration du connaître synthétique qui est restitution de la singularité dans un procès de la démonstration qui s'efforce d'échapper au jeu logique des déterminations et à l'enracinement du prouver dans le construire kantien, mais ne le peut pas en raison même de sa dépendance sur la forme espace.

1.3 Husserl : la démonstration et le fondement

Husserl, comme c'est prévisible, aborde la notion de démonstration d'une façon plus proche de notre culture logicienne et fondationnelle contemporaine. Pour commencer, il lie, tout simplement, la démonstration et l'idée de fondement, dans des formulations limpides qu'il faut parvenir à entendre dans leur force innovante.

Dans les premiers paragraphes d'*Expérience et jugement*, par exemple[28], Husserl pose que le jugement apophantique *S est p* est le thème central de la logique, mais que

[26]. *Ibid.*, 352.
[27]. *Ibid.*, 354-58.
[28]. Cf. Husserl, E., *Expérience et jugement*, trad. Denise Souche-Dagues, Paris, PUF, 1970, 1-5, p. 11-30.

celle-ci ne peut se donner d'autre fin que de servir l'évidence, concept en lequel il ne faut absolument pas voir une notion reçue, donnée, allant de soi : la phénoménologie est l'interrogation de l'évidence. Donc, elle va s'intéresser à ceci que tout jugement renvoie, à travers la médiation d'un enchaînement logique, à un jugement proto-évident : dont l'évidence n'est pas formelle ou opératoire, renvoie à un remplissement anté-prédicatif de la structure prédicative. La forme logique assure la fondation de la prétention à l'évidence de certains jugements, en la renvoyant à l'évidence d'autres jugements. Comme technique fondationnelle de la médiation de l'évidence, elle est néanmoins organiquement liée à une notion de l'évidence immédiate.

C'est donc une première dimension de la démonstration qu'il importe de souligner chez Husserl : la démonstration est l'agir formateur qui élabore la hiérarchie de l'évidence, qui sédimente cette hiérarchie. La démonstration tisse les renvois fondationnels qui guident la phénoménologie dans l'investigation du problème de l'évidence. Tout en lui livrant, de plus, un problème fondationnel "en plus" spécifique, celui de l'évidence de l'enchaînement logique et démonstratif lui-même.

Mais cet intérêt de la phénoménologie pour la démonstration comme *fondement*, c'est-à-dire comme cheminement de l'évidence, peut se lire d'une autre manière, dans le sens inverse pour ainsi dire : comme mise en rapport avec le pôle *critique*.

En vérité, ce n'est pas exactement de la *démonstration* mais de la *logique* en général que parle Husserl dans ce nouveau contexte. Dans *Logique formelle et logique transcendantale*, il propose une généalogie de la logique à partir de l'âme critique de la science. Le dynamisme critique de la science, affirme-t-il en substance, veut que les jugements qu'elle propose au fur et à mesure ne soient pas seulement entendus comme des dogmes, mais pris comme des prétentions à la vérité, prétentions qui requièrent comme telles un examen, une vérification. L'évaluation, bien entendu, consiste à retracer le chemin démonstratif rendant chaque jugement solidaire de jugements dont la véridicité peut être attestée directement par l'évidence. Donc, pour la même raison que la démonstrativité procure les rapports de fondation, la logique comme science de la démonstrativité est la critique de la science elle-même. Cette critique exige la "suspension" phénoménologique fondamentale, l'annulation de la valeur dogmatique usuelle du discours de la science, qui met en lumière l'intentionnalité comme telle sous deux angles – comme intentionnalité langagièrement structurée ou *opinion* et comme dispensatrice de l'intentionné comme tel (le noème) – et du même coup procure à la logique son thème, que Husserl désigne sous le nom d'*objectités de sens*[29]. La critique des énoncés de science passe par la mise à découvert de leur *sens*, nous instruisant de la façon de les vérifier.

La notion de démonstration est donc profondément liée à ce "retour" sur les jugements qui promeut les problématiques du *fondement* et de la *critique*, et qui, effectuant la suspension, dégage la région du *sens*. À ce niveau du dispositif husserlien, comme on le remarque souvent, il n'est pas clair que le langage soit concerné, ou du moins que ce qui est dit concerne exclusivement le langage. Même si le "retour" sur le jugement donnant lieu à la suspension et faisant accéder aux sens est "saisi" langagièrement par Husserl (comme le retour sur "S est p" accompli par la formulation "Le jugement *S*

[29]. Cf. Husserl, E., *Logique formelle et logique transcendantale*, trad. Suzanne Bachelard, Paris, PUF, 1957, 47-48, p. 177-181.

est p"), même si démonstration et critique sont clairement polarisées sur la forme des jugements, ce qui est dit du fondement, de l'évidence, de la réflexion intentionnelle, n'est pas exactement référé au langage. La mise en relief de l'intentionné comme tel, notamment, a tout aussi bien cours à propos des actes perceptifs, comme le dit Husserl en estimant qu'il expose par là même une *universalisation* de la problématique des objectités de sens[30].

Cette remarque nous invite à examiner ce que Husserl a pu dire de la démonstration au sens plus restreint, recouvert par l'acception logico-linguistique technique moderne.

De ce point de vue, il conviendra de rappeler que la science des jugements suspendus évoquée à l'instant, ou *doctrine des sens*, coïncide selon Husserl avec les deux premières strates de la logique selon son découpage canonique[31] de *Logique formelle et logique transcendantale* :

1. la *morphologie pure des jugements* ;
2. la *logique de la conséquence*.

Le première de ces strates est la science du bon assemblage des jugements relevant de la compétence de la logique, c'est-à-dire susceptibles de s'intégrer au corps de doctrine d'une science. Conformément aux conceptions modernes – qu'il s'agisse de la définition des formules du LPC ou des "grammaires formelles" à la Chomsky – Husserl insiste sur les notions d'*opération* et d'*itération* pour rendre compte de cette morphologie pure : il y a des schèmes opératoires d'assemblage (du type (*nom*, *nom*) $\mapsto$ *nom* et *nom*) dictant la formation d'une expression d'une certaine catégorie à partir d'expressions de catégories déterminées, et ces schèmes sont disponibles pour une réitération indéfinie.

La seconde de ces strates correspond à la technique de l'évaluation *vi formae* de la compatibilité des jugements (de leur caractère contradictoire ou non contradictoire). On pourrait rapprocher la *logique de la conséquence* des algorithmes du type "tableau sémantique" en logique des propositions ou logique des prédicats, que nous connaissons depuis Beth je crois[32] : bien que l'inspiration de ces algorithmes soit – ainsi que la terminologie le rappelle – complètement *sémantique* en termes contemporains, *id est* tournée vers l'exhibition d'un monde invalidant les jugements pris en charge, ils relèvent en fin de compte d'une méthodologie strictement syntaxique, et remplissent le rôle d'une attestation de déductibilité, quasiment d'une démonstration. Cependant leur façon de se tenir au bord d'une *logique de la vérité* au sens husserlien sans y entrer les rend fortement affines à sa *logique de la conséquence*.

Ce rappel, assorti de nos commentaires, nous montre bien quel est le problème d'une assignation plus technique de la notion husserlienne de démonstration, et pour commencer du rapport de celle-ci avec le plan du langage.

D'un côté, Husserl renvoie la logique dans son ensemble à la mise en œuvre de la perspective de la critique et du fondement sur les "jugements naturels", mise en œuvre qui dégage des objectités de sens donnant matière à une démonstrativité du type

30. Cf. *ibid.*, 50, p. 183-185.
31. Cf. *ibid.*, 13-15, p. 71-79.
32. Cf. Gochet, P., & Gribomont, P., *Logique 1*, Paris, Hermès, 1990, p. 238-248.

"algorithme du tableau" purement syntactico-linguistique, mais qui n'est pas une figure de la démonstrativité "hilbertienne".

D'un autre côté, il semble bien que Husserl envisage la démonstrativité hilbertienne comme transmission de l'évidence, ce qui "devrait" la faire échapper au rabattement sur le plan du langage.

La différence entre *expression* et *indication*, dans la première recherche logique, est déjà expliquée en termes de cette notion de démonstration. Un *indice* (*Anzeichen*) pour Husserl est un objet ou état de choses tel que la conviction d'existence que nous avons à son sujet est un *motif non évident* entraînant la conviction d'existence quant à un autre objet ou état de chose (dont l'indice est indice).

Exemples de Husserl[33] : les canaux de Mars pour des animaux intelligents martiens, les os fossiles pour des animaux antédiluviens, le nœud du mouchoir, etc.

L'important est le caractère de *non évidence*. Selon l'explication de Husserl, le cas où il y a évidence est le cas où il y a une démonstration. Il prend le contre-exemple apparent du degré impair d'un polynôme : celui-ci peut fonctionner comme *indice* de ce qu'il y a une racine réelle, si nous n'actualisons pas l'enchaînement de pensée qui prouve ce fait à partir de l'imparité du degré avec évidence. Dans cette hypothèse, le rapport n'est plus de conditionnement logique, mais une transition "contingente" entre convictions, reposant sur l'autorité reconnue à un discours "autre", fût-il celui de la mémoire non reproductive de la démonstration[34].

Derrida a commenté ce passage, dans des termes que j'ai oubliés. Selon mon souvenir pourtant, un point important est, selon lui, que Husserl, en récusant l'indication comme cas d'expression, veut réserver le concept de cette dernière – et par là même toute la sphère du sens – à la "fusion" de l'intention de signification et du support sensible signifiant. L'indication est renvoi contingent, immotivé, métonymie dépourvue de pensée. La pensée, de fait, est définie dans les *Recherches logiques* par Husserl comme la conduite de la fusion. Il importe pour nous de comprendre que cette conception de la pensée et du sens, pour Husserl, est aussi, immédiatement, une conception de la démonstration et de l'évidence.

Une démonstration est un enchaînement de l'expression comme fusion à une autre occurrence d'elle, qui a lieu dans l'élément de l'évidence, ou encore conserve l'évidence que cette fusion est. L'examen évidentiel adéquat de l'imparité du degré de la racine conduit, par des voies de fondation évidente, à la thèse certaine de l'existence d'une racine réelle : le contempler fusionnel du sens et de son signifiant se transfère et se transporte de l'un à l'autre.

Sauf que le dernier Husserl, qui, à nouveau, a intéressé Derrida – et ce n'est pas un hasard – converge avec le tout premier, celui des *Recherches logiques* que nous venons d'exhumer, pour observer que la consignation symbolique peut capitaliser comme *réseau d'indications* les fondations démonstratives : le texte reçu de la tradition géométrique, dans *L'origine de la géométrie*, est bien dit pouvoir ne transmettre que l'indice des "remplissements" intentionnels consignés en lui. L'opérativité n'est pas compromise, l'accumulation théorématique peut se poursuivre, mais le faire-sens est

33. Cf. Husserl, E., *Recherches logiques 2*, trad. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer, Paris, PUF, 1961, 2, p. 28-29.

34. Cf. *ibid.*, 3, p. 30-33.

perdu, la réactivation des chaînes d'intentionnalité n'a plus cours, n'est plus tentée. Le savoir mathématique se transmet sur le mode indiciel, on ne réagit jamais que comme à l'imparité du degré dans les *Recherches logiques*, de façon contingente et immotivée.

Dans le contexte de *L'origine de la géométrie*, Husserl met cette modalité de la tradition en rapport avec une ambivalence du logique, de la forme logique.

Celle-ci est la forme de la consignation symbolique, et, comme telle, elle est l'élément d'une sédimentation à travers laquelle en principe, les sens devraient toujours être récupérables, parce qu'elle stocke justement la "structure intentionnelle" du rappel qui en est requis. Mais il faudrait un pouvoir infini d'analyse et de synthèse, de recomposition pour faire vivre le sédiment logique. Pour cette raison de complexité et de finitude, ce sédiment devient donc indice, il déchoit de son authenticité et donne lieu à ce qui s'appelle purement et simplement *crise* de la rationalité[35] chez Husserl.

On a envie de demander à Husserl : qu'est-ce à dire ? Sont-ce des *démonstrations* qui ont été écrites, consignées ? Et si c'est le cas, que signifie cette déchéance, ce devenir-indiciel ? Une démonstration n'est-elle pas toujours *essentiellement* transmission de l'évidence ? Comment le "mode indiciel" peut-il affecter de façon grave ce qui en est l'éviction ou l'interdiction absolue ? [Et cette contamination ayant été pensée depuis le début par Husserl, comme l'exemple du polynôme de degré impair le montre].

Poser ces questions, c'est en fait demander comment la démonstration *consigne* la transmission d'évidence. C'est donc céder à la notion moderne de démonstration, qui met au premier plan la consignation symbolique. C'est à quoi nous allons venir maintenant.

2 La démonstration, objet linguistique-logique-temporel

2.1 Définitions de base

Il est facile de résumer le cadre moderne. On fait des démonstrations selon un *mode d'inférence*, le plus souvent lié à une *théorie logique*. Sont donc requis[36], pour procéder à des démonstrations :

- un langage ;
- des axiomes ;
- des règles d'inférence.

Un *langage*, c'est-à-dire, dans le contexte le plus usuel, un certain stock de constantes non logiques (relations, fonctions, individus) qui déterminent l'identité d'un sous-idiome de l'idiome englobant de la logique des prédicats du premier ordre ; ou, plus généralement, une description normative *a priori* des formules acceptables.

[35]. Cf. pour ces deux derniers paragraphes, Husserl, E., *L'origine de la géométrie*, trad. J. Derrida, Paris, PUF, 1974, p. 192-93.

[36]. Comme l'explicite lumineusement Feferman dans son article " Reflecting on Incompleteness " [Feferman, S., *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 56, N 1, Mars 1991].

Des *axiomes*, c'est-à-dire des formules assemblées selon les règles dans le langage spécifié qui sont prises *a priori* comme des *théorèmes*, soit des résultats de démonstration.

Des *règles d'inférence*, c'est-à-dire des schèmes de transformation autorisant l'ajout d'une formule au développement d'une démonstration, certaines formules de la démonstration étant supposées déjà introduites, inscrites. Ces schèmes de transformation sont strictement syntaxiques, ils nous renseignent formellement sur un acte formel qu'ils autorisent.

Ce qu'on appelle alors une *démonstration* est une suite $(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$ de formules du langage spécifié, telle que toute formule F_i ou bien est un axiome ou bien se déduit des $(F_j)_{j<i}$ par application d'une règle d'inférence. Si $D = (F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$ est une démonstration, F_n est le démontré de cette démonstration, on l'appelle un *théorème* (et on écrit $\vdash F_n$).

Du moins ce qui vient d'être dit correspond-il à une conception classique de la démonstration comme enchaînement linéaire d'assertions s'achevant dans un produit qui est le démontré.

On peut exprimer de manière légèrement différente les choses en s'intéressant de façon prioritaire non pas à la notion de *démonstration*, mais à celle de *théorème*. On définira alors de façon récursive la classe des théorèmes liés au mode d'inférence considéré, c'est-à-dire en termes de théorèmes primitifs et de procédés de fabrication. Est donc un théorème

i) tout axiome [=des théorèmes primitifs sont donnés] ;

ii) toute formule obtenue à partir de théorèmes par application d'une règle d'inférence [=procédés de fabrication] ;

iii) cela et uniquement cela qui apparaît comme théorème au titre de l'invocation – éventuellement finiment réitérée – de i) et de ii).

Si l'on regarde les choses de cette façon, ce que le mode d'inférence prescrit est l'engendrement de la classe des théorèmes, et une démonstration est par suite ce qui atteste qu'un théorème a été convenablement engendré. D'où l'idée de présenter la démonstration comme *arbre de construction* plutôt que comme suite de formules.

Voici un exemple. Le calcul propositionnel est caractérisé de la façon suivante :

- *langage* : $\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$, (,) ; variables propositionnelles, éventuellement constantes $\top$ et $\bot$; règles d'assemblage usuelles ;
- *axiomes* :

$$\begin{array}{ll} A_1 & (p \vee p) \rightarrow p \\ A_2 & (q \rightarrow (p \rightarrow q) \\ A_3 & (p \vee q) \rightarrow (q \vee p) \\ A_4 & (p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q)) \end{array}$$

- *règles d'inférence* :

  R1 : si $\vdash F$ alors $\vdash F_{x_1,\ldots,x_n}[G_1, \ldots, G_n]$ (règle de *substitution*)

  R2 : si $\vdash F$ et $\vdash F \rightarrow G$ alors $\vdash G$ (règle du *modus ponens*)

Je propose ci-après la preuve de $(\neg\neg p) \to p$. Elle est un tout petit peu compliquée, bien qu'élémentaire, mais elle sert bien les desseins de la présente exposition. Je l'écris d'abord de façon linéaire.

(1)	$(p \vee p) \to p$	Axiome A_1
(2)	$p \to (p \vee q)$	Axiome A_2
(3)	$(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q))$	Axiome A_4
(4)	$((p \vee p) \to p) \to (((\neg p) \vee (p \vee p)) \to ((\neg p) \vee p))$	Substitution dans (3)
(5)	$p \to (p \vee p)$	Substitution dans (2)
(6)	$(((\neg p) \vee (p \vee p)) \to ((\neg p) \vee p))$	*Modus ponens* (1)-(4)
(7)	$(\neg p) \vee p$	*Modus ponens* (5)-(6) [$p \to (p \vee p)$ n'est qu'une abréviation de $(\neg p) \vee (p \vee p)$]
(8)	$(\neg\neg p) \vee (\neg p)$	Substitution dans (7)
(9)	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	Axiome A3
(10)	$[(\neg\neg p) \vee (\neg p)] \to [(\neg p) \vee (\neg\neg p)]$	Substitution dans (9)
(11)	$(\neg p) \vee (\neg\neg p)$	*Modus ponens* (8)-(10)
$(11 bis)$	$p \to (\neg\neg p)$	Réécriture de (11)
(12)	$(\neg\neg p) \vee (\neg\neg\neg p)$	Substitution dans (11)
$(12 bis)$	$(\neg p) \to (\neg\neg\neg p)$	Réécriture de (12)
(13)	$((\neg p) \to (\neg\neg\neg p)) \to ((p \vee (\neg p)) \to (p \vee (\neg\neg\neg p))$	Substitution dans (3)
(14)	$(p \vee (\neg p)) \to (p \vee (\neg\neg\neg p))$	*Modus ponens* (12 bis)-(13)
(15)	$[(\neg p) \vee p] \to [p \vee (\neg p)]$	Substitution dans (9)
(16)	$p \vee (\neg p)$	*Modus ponens* (7)-(15)
(17)	$p \vee (\neg\neg\neg p)$	*Modus ponens* (14)-(16)
(18)	$(p \vee (\neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p) \vee p)$	Substitution dans (9)
(19)	$(\neg\neg\neg p) \vee p$	*Modus ponens* (17)-(18)
$(19 bis)$	$(\neg\neg p) \to p$	Réécriture de (19)

Elle est aussi prśenté de façon arborescente à la figure 1 : les branchements unaires symbolisent les substitutions [*(s.)*], les binaires les modus ponens [*(m.p.)*] ; *r.* désigne la réécriture au moyen de $\to$)

De toute façon, la définition de la démonstration dans le cadre d'un mode d'inférence met en relief ce qui était pour l'essentiel occulté dans les approches "phéno-transcendantales‘", à savoir le rôle de l'inscription et de la temporalité interne à l'inscription dans la notion de démonstration.

Les résultats possibles de démonstrations, les *théorèmes*, sont interprétés *a priori* comme les formules d'un langage, ce qui semble tourner le dos à l'idée hégélienne selon laquelle un *théorème* proprement dit est une sortie de la discursivité logique vers la singularité : si une telle idée devait être maintenue, il faudrait la rattacher à la notion de *théorème intéressant* (Hegel, déjà, opposait "théorèmes du commencement" et théorèmes "mûrs" en quelque sorte : on peut se demander si c'est la même chose ; en tout état de cause l'universalité langagière du théorème est fortement marquée dans l'approche moderne).

Le processus de démonstration est interprété comme un enchaînement d'étapes discrètes, assemblées en une figure – linéaire ou arborescente selon l'approche. Le

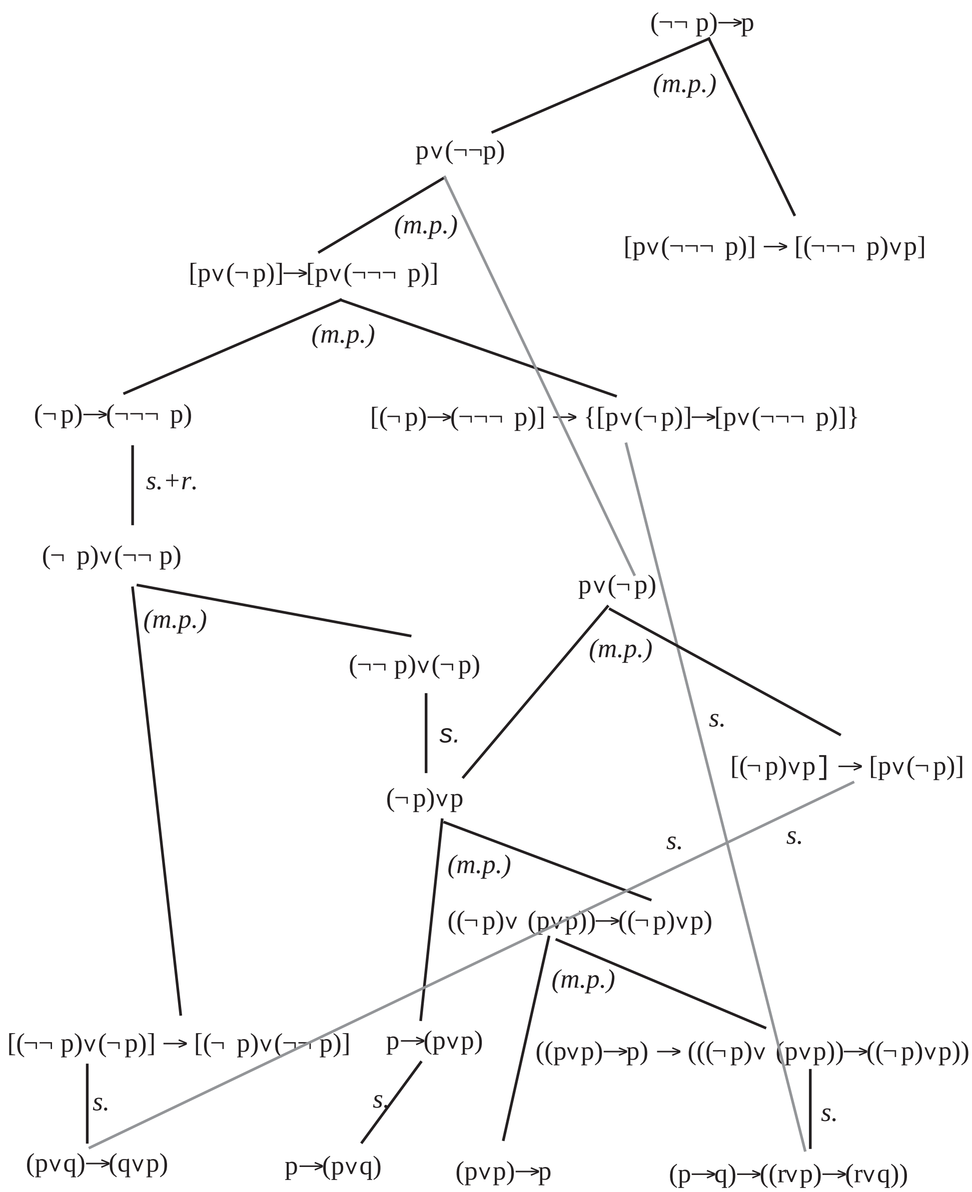

Figure 1: Arbre de la preuve de $(\neg\neg p \to p$

temps de ce parcours démonstratif est celui de ses étapes, c'est-à-dire qu'il se comprend complètement en termes des structures syntaxiques des formules employées, comme les règles d'inférence en témoignent. Les étapes, dans une certaine mesure, tiennent leur rang de la formule qu'elles produisent et de celles dont il est pour cela besoin, il n'y a pas en général possibilité de les permuter à loisir, elles ne sont possibles que si elles ont un matériau convenable.

Étant entendu que la notion de démonstration est pensée dans le contexte de l'objectivité constructive langagière (celle des formules, et celle des démonstrations elles-mêmes) elle se trouve liée à cette sorte d'objectivité et à la temporalité de la "praxis constructive" qui en est solidaire.

Dans le cadre d'une telle reterritorialisation, on peut soulever, en liaison avec l'environnement philosophique et fondationnel qui est le nôtre, certains problèmes qui, souvent, nous font revenir à nos lieux "phéno-transcendantaux".

2.2 Arbres de cheminement et arbres cumulatifs

Il est intéressant de revenir sur la présentation au moyen d'un arbre de la démonstration de $(\neg\neg p) \to p$. Dans le principe, le fait même qu'une telle présentation soit possible insiste sur une dimension de la conception contemporaine moderne que je n'ai pas encore soulignée bien qu'elle soit essentielle : une démonstration est prise comme un *objet*, une liste de formules ou un arbre selon le type de présentation adopté, mais en tout cas un objet. Alors que la conception classique envisage plutôt une *transition* qui est en même temps un *agir*, c'est-à-dire insiste sur la dimension de l'*action*, la conception de référence aujourd'hui, si elle insiste sur la teneur temporelle intrinsèque de la démonstration, ne semble pas regarder d'abord – ou en tout cas pas seulement – cette temporalité comme une pure différence apportée par la transversalité d'un agir, mais plutôt comme une temporalité nécessaire toujours-déjà projetée sur la configuration qui voit le jour en elle. D'où il résulte que la démonstration est prise comme un objet, est *a priori* considérée comme contemplable en tant qu'objet, et pas exclusivement comme effectuable, du moins on a ce sentiment en première approximation.

Dans la présentation arborescente, ce sont surtout les théorèmes qui sont mis en vedette comme objets, la présentation consiste en l'introduction au moyen d'une clause récursive de la classe d'objets que forment les théorèmes. Mais le fait que la présentation soit de ce type introduit alors une superposition catégorielle troublante pour le point de vue classique entre le subjectif présumable de la démonstration, et donc des théorèmes, et l'objectif présumable de *ce sur quoi* portent théorèmes et démonstrations. Au minimum, cet objectif devrait être celui des objets introduits par le même type de clause, soit encore des objets que l'on a coutume d'appeler *objets constructifs*, et qui sont, au gré de la conscience fondationnelle moderne, les objets minimaux incontournables pour toute pensée ou toute recherche mathématique. La présentation de la classe des théorèmes nous donne donc les théorèmes comme des objets de la même sorte que ces objets qui sont le thème de toute recherche mathématique, donc ces objets dont parlent d'éventuels théorèmes. Le style de cette présentation majore ainsi le court-circuit entre une partie de l'objectivité mathématique et le subjectif déductivo-théorématique assumé par le point de vue moderne.

Pourtant, un examen plus attentif signale une double différence entre les arbres

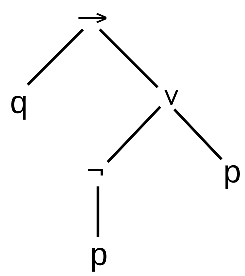

Figure 2: Arbre de construction de la formule $q \to ((\neg p) \vee p)$

témoignant de la synthèse récursive d'une démonstration et les arbres témoignant de la synthèse d'un objet constructif standard, vraiment et purement objectif en quelque sorte. La figure 2 représente par exemple l'arbre qui retrace la synthèse selon les règles d'assemblage de la formule $q \to ((\neg p) \vee p)$.

Notre arbre représentant une démonstration possède deux propriétés distinctives à l'égard de ce type d'arbre.

Premièrement, il autorise le réaccès des flèches d'élaboration à des éléments déjà utilisés : dans notre exemple, l'axiome $(p \to q) \to (q \to p)$ est utilisé trois fois pour une substitution, et l'axiome $(p \to q) \to [(r \vee p) \to (r \vee q)]$ deux fois. Dans l'arbre retraçant la synthèse de $q \to ((\neg p) \vee p)$, en revanche, le fait que la formule possède deux occurrences de p donne lieu, dans l'arbre, à deux "feuilles" p. Il en va ainsi parce que, chaque fois qu'un nœud "père" opère sur un certain matériau, les éléments opérés prennent place dans un assemblage qui est dès lors rigidifié pour la construction d'ensemble, dont il est à vrai dire une sous-formule. Si donc on a besoin de p "ailleurs" pour une autre sous-formule, on introduira une nouvelle feuille p.

Deuxièmement, l'arbre de construction de la formule est tel que, lorsque le label d'un nœud "père" est donné et lorsque la sous-formule obtenue par lui est aussi explicite, on peut en déduire les nœuds fils : sachant que $p \vee (\neg p)$ a été construit par un $\vee$, on peut conclure que les nœuds fils étaient de label p et $\neg p$ respectivement. En revanche, lorsqu'un nœud d'une démonstration est étiqueté par "*modus ponens*", la connaissance du Q résultant ne permet pas de retrouver le P tel que P et $P \to Q$ étaient les nœuds fils.

On peut donc dire que les arbres de démonstration ont à la fois plus et moins de mémoire : plus de mémoire parce qu'ils autorisent le réaccès, moins de mémoire parce qu'ils ne gardent pas la trace visible ou même simplement reconstructible du passé des nœuds élaborant. Il sera pourtant plus descriptif de dire que les deux sortes d'arbres sont, respectivement, des *arbres cumulatifs* et des *arbres de cheminement*.

Dans le cas des arbres consignant la fabrication d'une formule, arbres qui décrivent un objet constructif-type – il en irait de même avec les arbres décrivant la formation d'un nombre entier ou d'une expression algébrique – l'arbre est cumulatif : il n'oublie rien au sens où le passé reste intégralement visible, où l'information s'accumule au gré de l'assemblage, mais en même temps il oublie tout parce que chaque élément mobilisé est immobilisé aussitôt dans la sous-formule dont il est constituant. Le passé n'est retenu qu'autant qu'il est objectivé et désactivé.

Les arbres retraçant une démonstration, en revanche, ne gardent pas le passé au sens d'une objectivation qui le retient indéfiniment dans le dernier présent. Mais ils le gardent au sens d'une disponibilité pour le processus. Cette différence ne se laisse, au fond, pleinement dire qu'en faisant intervenir un *sujet* de la démonstration. En effet, en un sens, ce qui signe l'identité d'une démonstration, c'est la totalité d'étapes qui la constituent, on pourra donc dire qu'"en droit" rien n'est oublié. Mais, du point de vue de quelqu'un qui habite en permanence la dernière formule, soit très exactement d'un sujet en train de démontrer, alors le passé se dissimule, s'occulte, n'insiste pas dans la formule obtenue comme pour un arbre cumulatif. Le réaccès au passé doit être envisagé de la même façon : ce réaccès est loisible pour le sujet démontrant, mais non nécessaire.

Une démonstration, on le sent, est une métaphore formelle de l'existence : tout compte, et signe l'identité du parcours total ayant nom *existence*, mais tout passe et disparaît de la fenêtre actuelle de l'existence, qui ne montre pas à chaque instant l'ensemble de la provenance. De la sorte, les épisodes révolus peuvent rester enfouis, et aussi bien revenir pour les besoins d'un nouvel événement.

Il ne faut pas exagérer la portée de cette description "lacanienne". Elle est totalement relative à une convention représentative[37]. On pourrait représenter la synthèse d'une démonstration comme celle d'une formule. Il faudrait alors écrire chaque élaboration comme une concaténation où sont rappelés les constituants : on n'écrirait $MP(p, p \to q)$ au lieu d'écrire simplement q, au sommet d'un triangle à la base duquel figurent p et $p \to q$, et $SUB(q, \neg p, p \to (p \vee q))$ au lieu de $p \to (p \vee \neg p)$ au sommet d'une arête à la base de laquelle figure l'axiome $p \to (p \vee q)$ [auquel cas, d'ailleurs, on aurait besoin de se donner deux occurrences de l'axiome si on veut lui faire subir deux substitutions]. Une démonstration apparaîtrait alors comme une formule complexe dans laquelle serait inscrite-objectivée chaque étape de sa synthèse récursive. Mais il n'est pas dénué de signification que la coutume ne soit pas de procéder ainsi. Nous ne concevons pas spontanément les démonstrations comme de tels assemblages récapitulatifs. Toute l'intention du fait de démontrer est de *détacher* les conclusions, au bout du compte celle du théorème prouvé. Le *modus ponens*, en conséquence, s'appelle aussi règle de *détachement*, ce qui semble bien dire que l'on garde q et que l'on oublie la prémisse p et la configuration contextuelle $\{p, p \to q\}$. De même, lorsqu'on substitue une seconde fois dans un axiome, on a bien le sentiment de recourir à nouveau à un schème qui est un et identique entre nos deux recours, et non pas d'écrire un assemblage complexe en deux endroits duquel une substitution est opérée. La présentation linéaire, plus traditionnelle, des démonstrations, majore d'ailleurs la distinction entre arbres cumulatifs et arbres de cheminement. Dernière remarque : si l'on adoptait une notation "cumulative", du type envisagé à l'instant, la formule démontrée ne serait pas immédiatement lisible "dans" l'assemblage symbolique notant la démonstration.

On peut donc résumer ce qui précède en disant que dans le cadre de la convention représentative "arborescente" des fabrications d'entité suivant une clause récursive au moyen d'un arbre, la distinction entre objet et action, mettant la démonstration du côté de l'action, se préserve dans la distinction entre arbres cumulatifs et arbres de

[37]. C'est mon ami Yves-Marie Visetti qui a clarifié ce point pour moi.

cheminement, bien qu'elle semble de prime abord niée par le point de vue moderne. Du moins pour autant qu'on s'en tient au mode de consignation des démonstrations le plus naturel et le plus conforme à notre perspective usuelle sur les démonstrations.

2.3 Brouwer et la transmission de vérité

De notoriété publique, il existe une logique intuitionniste. Elle a été codifiée par Heyting, et reçoit souvent le nom de logique de Heyting. Il est possible de la présenter comme une variante de la logique des prédicats classiques : le IPC (*Intuitionnistic Predicate Calculus*), qui fait pendant au LPC (*Lower Predicate Calculus*). Son langage est le même que celui du LPC, ses règles d'inférence sont les mêmes, elle ne diffère que par les axiomes qui sont retenus, dans la présentation courante la plus voisine de celle du mode d'inférence de Hilbert-Ackermann[38]. Si l'on opte plutôt pour le système de la déduction naturelle (à la Prawitz), étant donné que tous les axiomes disparaissent au profit des règles d'élimination et d'introduction, la différence entre le IPC et le LPC se traduit uniquement en termes de règles d'inférence, portant désormais tout le poids de l'identification du mode d'inférence : dans une présentation qui se recommande par sa simplicité et sa clarté[39], le calcul des prédicats intuitionniste a les mêmes règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs que le calcul des prédicats classique, et ce dernier ne se distingue en fait que par la disponibilité d'une règle propositionnelle du tiers exclu, dont plusieurs formulations sont possibles[40].

Mais en fait, il y a une querelle sur la légitimité et la pertinence de cette "logique de Heyting". Brouwer défendait un point de vue sur les mathématiques dont un des articles était la récusation de la tripartition hilbertienne entre langage formel, métalangage et réel (ce dernier étant maintenu comme un pur pôle fictionnel selon le formalisme le plus strict, mais sans que cela interdise son identification avec l'intelligible platonicien) : il ne tombait pas d'accord que les mathématiques pussent être égalisées à ou traduites dans un système de phrases assemblées selon des règles. En fait, pour lui, les mathématiques n'étaient pas primitivement *discours* sur un *externe* méritant le nom de réel, mais *construction*. Une assertion P ne serait donc pas à envisager comme une articulation apophantique "mimant" les états de choses d'un putatif domaine ontologique, mais comme un acte (public) témoignant d'une construction (nécessairement intime). Heyting connaissait cette conception de Brouwer, qui l'a conduit, notamment, à refuser explicitement la distinction hilbertienne entre mathématique et métamathématique[41] (pour Brouwer, le discours métamathématique témoigne de constructions menées à

[38]. Cf. à ce sujet, par exemple, Goldblatt, R., *Topoi The Categorical Analysis of Logic*, Amsterdam, North Holland, 1984, p. 237-38 et 249.

[39]. Cf. par exemple Lalement, R., *Logique, réduction, résolution*, Paris, 1990, Masson, p. 113-129.

[40]. Lalement signale les trois suivantes :

$$\frac{}{p \vee (\neg p)} \qquad \frac{\neg\neg p}{p} \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg p] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{p}$$

(elles sont mutuellement équivalentes).

[41]. Cf. Heyting [1971], 4.

bien sur le matériau linguistique, il est donc du même type que le discours mathématique, surtout si l'on considère, comme lui, que les entités linguistiques sont justiciables d'une contemplation mathématique les égalant à l'objectivité arithmétique[42]). Il a donc présenté sa logique en connaissance de cause, comme un artefact langagier tentant de rendre compte des enchaînements d'assertions conservant la "vérité intuitionniste" : si sa logique est bonne, dit-il, elle a cette propriété que, lorsque $P \rightarrow Q$ est valide (Q se déduit de P), et lorsque P est attesté par une construction intime, alors Q peut être attesté par une construction intime également. Heyting concède d'ailleurs que sa logique émet seulement une prétention à remplir un tel office, et n'épuise pas le mystère de la transition mentale de construction à construction : il contresigne la thèse brouwerienne selon laquelle les formalisations – nécessairement linguistiques – ne sont que la projection *a priori* insatisfaisante de ce qui est su dans l'élément et l'attitude de la construction. On voit donc la proximité avec Husserl : la "consignation symbolique" est par définition une technique de transmission de ce qui tient lieu, dans le contexte, de vérité (tout en n'étant pas *adequatio rei et intellectus*, mais auto-pénétration d'un faire plutôt), et elle est sue et dite moyen d'une perte possible par l'intention même qui l'institue.

Ce qu'on appelle "BHK-explication" en est l'aveu et la confirmation.

Il s'agit de l'explication dans la ligne de Brouwer, Heyting et Kreisel (d'où le sigle BHK) de la signification des opérations logiques. Citons intégralement la manière dont Troelstra la résume :

> "L'explication utilise les concepts primitifs de preuve (constructive) et de construction, et nous dit le sens de "preuve d'une assertion composée" en termes de "preuve d'un constituent".
>
> (a) une preuve de $A \wedge B$ consiste en une preuve de A et une preuve de B.
>
> (b) une preuve de $A \vee B$ consiste à spécifier une preuve de A ou une preuve de B.
>
> (c) une preuve de $A \rightarrow B$ consiste en une construction c qui transforme toute preuve de A en une preuve de B (en même temps que la vision que c a la propriété : d prouve $A \Rightarrow cd$ prouve B).
>
> (d) $\perp$ est une assertion non prouvable. Donc une preuve de $\neg A$ (défini par $A \rightarrow \perp$) est une construction qui transforme toute preuve de A en une preuve de $\perp$.
>
> (e) Si la variable x décrit un domaine "de base" D (i.e. un domaine tel que toute construction (objet) lui appartenant est *donnée* comme telle ; en d'autres termes, les éléments d de D "portent en eux-mêmes la preuve" qu'ils appartiennent à D), nous pouvons présenter une preuve de $\forall x A x$ comme une construction c qui appliquée à tout $d \in D$ fournit une preuve $c(d)$ de Ad, en même temps que la vision que c a cette propriété. Les nombres entiers sont un exemple de tel domaine "de base".
>
> Dans le cas d'un domaine D arbitraire, il faut supposer que c agit sur une paire $d, d\prime$, où d est un élément de D, $d\prime$ une preuve que $d \in D$.

[42]. Cf. Brouwer [1929], 263.

> (f) Pour x décrivant un domaine de base D, une preuve de $\exists x Ax$ est donnée par une paire c, d, où c est une preuve de $Ad, c \in D$.
>
> Dans le cas d'un domaine arbitraire, nous avons besoin d'un triplet $(c, d, d\prime)$ où c est une preuve de Ad, et $d\prime$ une preuve de $d \in D$."[43]

La BHK-explication est donc simplement le discours expliquant ce que signifie pour un intuitionniste le langage logique. Dans Nelson [1992][44], l'auteur restitue sous forme d'un plaisant dialogue entre intuitionniste et formaliste cette explication. En même temps, elle est la justification de la valeur conférée à la logique de Heyting : l'explication est telle que les axiomes de la logique de Heyting doivent paraître comme allant de soi.

Il est impossible de ne pas voir à quel point cette façon de voir et de présenter les choses est apparentée à un point de vue herméneutico-transcendantal : la "déduction" de la table des catégories phrastiques logiques et des règles de synthèse qui peuvent les gouverner est renvoyée à la compréhension originaire que nous avons de ces catégories, compréhension qui est elle-même présentée comme pré-discursive (faisant intervenir l'*insight de l'évidence). Qu'on* écoute ainsi cette autre phrase de Troelstra :

> "Cette interprétation des constantes logiques est un premier exemple d'introduction de concepts abstraits dans les mathématiques constructives ("preuve", "construction") ; et c'est notre compréhension de ces concepts (notre réflexion sur eux) qui nous permet de voir que les lois de la logique des prédicats intuitionniste sont valables dans cette interprétation (quelle que puisse être l'extension exacte des concepts de preuve et de construction, l'explication est assez claire pour ceci)."[45]

Troelstra semble nous dire à la lettre que la BHK-explication est un acte herméneutique au sein de la pré-compréhension donnée des notions de preuve et de construction. Pour essayer d'être plus explicite, le concept de preuve dont parle ici Troelstra, et qui est le concept compatible avec la pensée de Brouwer, au titre duquel la "logique de Heyting" est possiblement pertinente, ne fait pas sens indépendamment de l'objet au sujet duquel on prouve, à savoir les constructions, encore moins avant cet objet. Les catégories en termes desquelles se formule la juridiction de Heyting sont "trouvées" avec leur signification dans une réflexion immanente à cet objet des constructions, si bien que ces catégories (le $\wedge$, le $\vee$, le $\neg$, le $\rightarrow$, le $\leftrightarrow$, le $\forall$ et le $\exists$) se définissent en termes de constructions des assertions qu'elles synthétisent. La régulation de Heyting apparaît alors comme une régulation compatible avec la signification en termes de constructions ainsi exhibée de ces catégories. On a donc là l'exemple d'une "logique", et ultimement d'un mode d'inférence entièrement enraciné dans la strate des évidences qu'ils sont supposés informer, en accord avec ce qu'on peut appeler une exigence husserlienne. La sorte d'évidence dont il s'agit a néanmoins cela de très peu husserlien[46] et de résolument "moderne" qu'il s'agit de l'évidence à soi d'un agir au moins autant

43. Troelstra [1977], 977 ; librement traduit par nous.
44. Salanskis-Sinaceur [1992], 157-158.
45. Troelstra [1977], 978.
46. À première vue.

que de l'évidence pour une perception d'un être-là, et que cette évidence est dégagée par une interprétation. Néanmoins, même garanti par une telle explication, même baptisée du sceau de cette analyse herméneutico-transcendantale, la "logique de Heyting" est réputée non apodictiquement fiable par l'esprit intuitionniste, ce qui, pour le coup, manifeste l'immensité de la suspicion à l'égard du "gramme"[47] derridien qui affecte cet esprit.

2.4 Rupture de la démonstration avec le logos ?

Une tendance tout à fait récente de la théorie de la démonstration, je crois, est l'autonomisation de la démonstration vis-à-vis du logos apophantique. Sur le plan philosophique, il me semble assez clair, tout au long de la tradition, que la logique est un canon encadrant l'usage des prédications de la forme *S est P*. C'est encore ainsi que la présente Husserl, en tout cas, et la forme de la prédication reste à l'évidence au centre de ce qu'en disent Kant ou Hegel, comme nous l'avons vu : ils décrivent le procès de la démonstration comme celui de l'attribution de déterminations à un sujet.

On observe souvent et volontiers que la place et l'importance de la quantification dans le raisonnement logique n'avaient pas été vus par la tradition. Ou du moins qu'elle se contentait de l'appréhender à travers dans la théorie du syllogisme, qui, à vrai dire, se présente elle-même plutôt comme une algèbre des prédicats en cause que comme le traitement de formes quantifiées. Et l'on est ainsi conduit à mettre l'accent sur le rôle révolutionnant du travail de Frege, puis de Tarski. Mais du point de vue de ce dont je parle ici, à savoir de la relation de la conception logique de la démonstration avec le logos apophantique, l'avènement du LPC-SL n'a pour l'essentiel rien changé : les démonstrations restent des dérivations de *phrases* et les phrases de base (les *phrases atomiques*) restent des prédications (simplement généralisées quant à leur nombre de places). On peut même dire que la conception contemporaine d'une formule de la logique des prédicats du premier ordre rapproche la phrase logique de la phrase de la langue naturelle, du logos ordinaire : elle en devient un miroir plus fidèle, qui a été utilisé en ce sens et à cette fin par l'intelligence artificielle.

La velléité de "révolution" dont je veux parler ici est autre, elle consiste dans l'expulsion tendancielle du logos de son statut de présupposé de toute logique. Je vais tenter d'attester ce dont je parle en évoquant certains aspects de la logique actuelle.

Pour commencer, il faut mentionner tout simplement l'apparition et la montée en puissance de la théorie de la calculabilité, qui constitue finalement le *calcul* comme un paradigme concurrent ou alternatif à celui de la *preuve*. Une communication entre les deux paradigmes est alors assurée par l' "arithmétisation de la syntaxe" de G"odel : ce dernier, en faisant valoir que les formules de la logique des prédicats du premier ordre étaient codables de manière intelligente par des nombres entiers, en telle manière que les opérations fondamentales d'assemblages correspondissent à l'action de fonction récursives, a ouvert la voie à une vision de la preuve comme calcul. Plus précisément, on montre que les codes des formules *déductibles* de l'arithmétique forment un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbf{N}$. Réciproquement, à tout sous-

[47]. Je reprends le mot et le concept à Bernard Stiegler ; cf. Stiegler, B., *La technique et le temps La faute d'Épiméthée*, Paris, Galilée, 1994, notamment p. 228-231.

ensemble récursivement énumérable de **N** correspond un système déductif tel que ce sous-ensemble soit celui des codes de ses théorèmes[48]. Une spécularité fondamentale entre les preuves et les calculs (interprétés dans le langage de la récursivité) est ainsi acquise. L'orientation qui se dessine alors est une orientation de "désubstantialisation" à la Cassirer-Renouvier[49] : on incline à appeler *démonstration* tout ce qui est un procéder analogue à celui des démonstrations de la logique des prédicats du premier ordre, sans plus se soucier de ce que les entités sur lesquelles roule ce procéder soient du type *phrase*.

Le simple fait que l'on considère le lambda-calcul comme une branche de la logique, de ce point de vue, est l'accomplissement de la tendance dont je parle. Le lambda-calcul, de prime abord, apparaît comme une formalisation de la manipulation algébrique – avec comme geste principal la substitution. Mais on démontre que ce système est "équivalent", au sens d'une traduction systématiquement possible, aux autres langages de la calculabilité (toute fonction récursive, par exemple, est représentable par une lambda-expression appropriée). C'est dans cette simple figure qu'il prend le rang d'une des grandes branches de la logique moderne. Pourtant, le lambda-calcul ne fait aucune référence aux catégories classiques du phraser logique. Dans sa variante radicale qu'est la théorie des combinateurs de Curry, il ne contient même plus la polarité entre variable et constante.

Mais c'est surtout comme élément contribuant à la *correspondance de Curry-Howard* que le lambda-calcul renforce la perspective suivant laquelle la logique échappe au *logos*, comme nous allons le voir maintenant

Considérons le système déductif extrêmement simple du *Positive Natural Calculus*, *id est* du fragment implicatif de la déduction naturelle de la logique propositionnelle[50].

Le langage est caractérisé par l'unique connecteur binaire $\to$, et roule sur des variables propositionnelles notées avec des lettres majuscules.

Il n'y a pas d'axiome.

Les règles d'inférence sont au nombre de deux, les règles d'introduction et d'élimination du $\to$, qu'on schématise comme suit :

$$I(\to)) \quad \dfrac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B} \qquad\qquad E(\to) \quad \dfrac{A \quad A \to B}{B}$$

Une dérivation est une arborescence déployée en suivant ces deux règles, à partir de formules simplement "posées" qu'on appelle des *prémisses*, étant bien entendu que dans l'application de la règle d'introduction du $\to$, la prémisse A est déchargée. On dérive, dans le cadre de ce système, le théorème archi-simple $A \to (B \to A)$:

48. J.-P. Delahaye attire l'attention sur cette réciprocité ; cf. Delahaye, J.-P., " Cinq classes d'idées ", *Technical Report*, 1989, p. 12.

49. Ce que je sais du second, je le tiens par tradition orale de Laurent Fedi.

50. Dans ce qui suit, je m'inspire très directement de Longo, G. & Moggi, E., " Constructive natural deduction and its 'Ω-set' interpretation ", *Math. Struct. in Comp. Science* (1991), vol. 1, p. 215-254.

A	B	[prémisses]
A		[réécriture d'une prémisse (règle implicite "en plus" ici, qu'on peut bien sûr se donner explicitement)]
$B \to A$		[introduction du $\to$; la prémisse B est déchargée]
$A \to (B \to A)$		[introduction du $\to$; la prémisse A est déchargée]

De là, passons à ce que Longo et Moggi, dans Longo-Moggi [1991], appellent la version *constructive* du *Positive Natural Calculus* : il s'agit du même calcul, accompagné de son "reflet" dans le lambda-calcul, suivant la correspondance de Curry-Howard.

Le point de vue complémentaire sur ce calcul demande, pour commencer, qu'on ne conçoive plus les lettres A, B, C comme des noms de propositions, mais comme des noms de *types*. Une proposition selon le point de vue classique est assertée au nom des preuves dont on en dispose. Si l'on a une perspective un tant soit peu formaliste ou constructive, la proposition réside en fait tout entière, à la fois quant à son sens et quant à sa validité, dans les preuves qui en sont accessibles. D'où l'idée que la proposition n'est pas autre chose que la classe de ses preuves, ou encore que la proposition est pour ainsi dire un type auquel appartiennent, comme ses instances, les preuves de la proposition : ce qui précède est l'explicitation du concept de la "proposition comme type". Le discours en termes de preuves et de propositions serait ainsi une transposition duale d'un discours équivalent sur les types et les termes qui les instancient. On se prépare donc à noter $x : A$ quelque chose qui se lira aussi bien " x est un terme (variable) de type A " ou " x est une preuve de la proposition A ". Du côté des types, on se donne le même procédé de formation que l'on admettait tout à l'heure pour les formules de la logique implicative : si A et B sont des types, $A \to B$ est un type. Du côté des termes, on a des variables, la concaténation (si s et t sont des termes, st est un terme) et la lambda-abstraction (si s est un terme et x une variable, $\lambda x.s$ est un terme – à concevoir comme dénotant la fonction qui à un terme variable x associe le terme s, où figure peut-être x). On peut alors réécrire la preuve de tout à l'heure en faisant systématiquement figurer à côté de chaque type un terme qui l'instancie (une "preuve" de la proposition qu'il est) : pour une prémisse, cette preuve est un terme x absolument inconnu, une variable. D'où la nouvelle version de la démonstration de $A \to (B \to A)$:

$x : A$	$y : B$	[prémisses]
$x : A$		[réécriture d'une prémisse]
$\lambda y.x : B \to A$		[introduction du $\to$; la prémisse B est déchargée]
$\lambda x.(\lambda y.x) : A \to (B \to A)$		[introduction du $\to$; la prémisse A est déchargée]

Le principe opératoire de la correspondance est consigné dans les deux règles d'introduction et d'élimination de $\to$, accompagnées désormais de leur contrepartie du côté des termes attestant les propositions-types :

$$
\begin{array}{lcll}
 & \begin{array}{c} x : A \\ \vdots \\ b : B \\ \hline \lambda x.b : A \to B \end{array} & & \begin{array}{c} a : A \quad c : A \to B \\ \hline ca : B \end{array} \\
I(\to)) & & E(\to) &
\end{array}
$$

L'élimination du $\to$ correspond à la concaténation des preuves, son introduction à l'abstraction fonctionnelle des termes. La correspondance ainsi établie, dont on peut détailler les aspects techniques et qu'on peut soutenir à propos de systèmes déductifs plus riches, est ce qu'on appelle correspondance de Curry-Howard[51]. Il semble[52] que certains aspects en aient été conçus par Curry et Feys dès 1958, bien que l'idée de proposition-comme-type n'ait été réellement mise en œuvre et explicitée que par Martin-L`of à partir de 1972, et que l'exposé de référence de la correspondance de Curry-Howard soit celui de Howard en 1980[53].

Il résulte de cette reformulation que les termes du lambda-calcul expriment toute la structure arborescente, elles la projettent et la linéarisent dans un assemblage "algébrique" classiquement identifié à un calcul. Dans cette épure littérale des démonstrations, seuls l'arborescence et son dynamisme dérivatif sont traduits, le fait que l'on chemine de certaines *phrases* jusqu'à de nouvelles *phrases* n'est plus pris en compte. Ou bien cela ne subsiste que dans l'indication par une variable de ce qu'une prémisse est une prémisse, et la nomination typale des "propositions-comme-types" comme points d'achèvement possible d'une preuve. Du moins dans la mesure où l'on considère ces éléments comme faisant écho à la structure prédicative de la phrase.

On pourrait aussi commenter ce formalisme en le rattachant à la notion de *réalisation*, qui elle-même est une élaboration technique de la BHK-explication : les λ-termes sont des candidats à l'inscription de ce que Brouwer appelle "constructions", et il est donc normal, au titre de la BHK-explication, qu'on puisse complètement "traduire" dans ces termes le processus de démonstration. L'idée brouwerienne de construction est déjà une récusation du statut classique du logos, et ne le cache d'ailleurs pas, ainsi que nous l'avons vu.

Avant tout développement technique, l'intuition des "propositions-comme-types" apparaît à vrai dire comme une subversion du dispositif classique du logos et de la démonstration. En effet, le rapport *type-instance* est normalement conçu dans l'horizon de la structure prédicative : ce qui fait un type *type* est la disponibilité d'un prédicat, susceptible de s'appliquer à des sujets variés. Les "phrases" sont fondamentalement, au niveau de leur noyau prédicatif, le rattachement d'instances à leurs types. Si, donc, l'on dit que les propositions sont des types dont les instances sont les preuves, on situe les concepts de type et d'instance au niveau superphrastique et non plus intraphrastique,

[51]. Cf. Lalement, R., 1990, 118-121.

[52]. Cf. Hindley, J.R., et Seldin, J.P., *Introduction to Combinators and λ-calculus*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986, 193-194.

[53]. Cf. Howard, W.A., " The formulae-as-types notion of construction ", in Seldin, J.P. et Hindley, J.R., Eds., *To H.B. Curry : Essay on Combinatoric Logic, Lambda-Calculus and Formalism*, 479-490, Academic Press, 1980.

et l'on défait leur relation organique usuelle : le type est le *terminus ad quem* de ses instances plutôt que leur unité catégoriale ou ontologique.

3 Conclusion

Évidemment, il faudrait, en conclusion de ce travail, tout à la fois tirer un enseignement synthétique de l'évolution contemporaine de la pensée logico-mathématique de la démonstration et situer cette évolution par rapport aux éléments divers mais apparentés qui interviennent dans l'approche appelée ici "phéno-transcendantale".

Je suis clairement trop court, ma réflexion n'est pas assez mûre pour accomplir un tel programme. Je ferai donc simplement quelques remarques.

Il n'est pas douteux, je crois, qu'une "nouveauté" substantielle de la démonstration, dans le cadre et le contexte contemporains, est tout simplement qu'elle acquiert une visibilité nouvelle, un statut d'*objet* qui lui est ouvert par son identification *a priori* comme inscription symbolique et la mise en relief de sa séquentialité propre. Comme je l'ai dit un peu plus haut, cette visibilité résulte de la projection et la mise à plat de ce qui était surtout ressenti dans l'approche phéno-transcendantale comme un agir orthogonal aux phrases et aux objets mathématiques, replié sur soi dans un certain mystère. Ce qui ne veut pas dire, comme notre développement sur les arbres cumulatifs et les arbres de cheminement le montre, que la notion de l'orthogonalité de l'existence à ses traces disparaisse dans le cadre actuel.

Ce qui semble aller avec la venue au jour de cette visibilité objective de la démonstration, c'est le retrait de la figure de la *monstration* : il ne fait plus partie de façon intrinsèque et primordiale de l'idée de démonstration qu'elle accompagne la révélation d'un objet, qu'elle assure par son dire et son faire l'imposition d'une évidence externe. Mais, d'une certaine façon, cela signifie seulement que l'évidence s'est désormais réfugiée dans la preuve elle-même : la preuve symbolique moderne ne peut être développée et administrée que dans et selon l'évidence spécifique de la constructivité. Tout ce qui la compose se donne constamment à voir dans sa généricité de structure ou d'objet constructifs. La différence est que cette nouvelle évidence est autant celle d'un faire que celle d'un voir : selon nos analyses, Hegel a en partie anticipé une telle "norme de l'évidence".

De mon propre point de vue, ce qu'il y aurait lieu d'interroger, dans cette nouvelle situation, et en tenant compte des tendances les plus récentes dont j'ai fait état, c'est le rapport qu'il y a entre les gestes du démontrer au sens de la convention moderne et l'acte d'*expliciter* : si démontrer, c'est dériver des phrases selon une norme qui les objective et permet de concevoir la déduction comme homologue à un calcul – et si d'ailleurs l'idée que les constituants élémentaires d'une preuve sont des phrases est même susceptible d'être abandonnée – dans quelle mesure pourra-t-on désormais envisager les démonstrations comme des cheminements interprétatifs, analyser chaque pas de réécriture comme une explicitation ? Est-il plus ou moins facile de considérer la démonstration de la sorte aujourd'hui que dans l'ancien contexte ?

J'achève cet article en laissant retentir cette dernière question.

4 Bibliographie

Brouwer, L.E.J., [1929], " Mathematik, Wissenschaft und Sprache ", Monatshefte für Mathematik, 36, 153-164 ; trad. franç. J. Largeault in Largeault, J., Ed, *Intuitonnisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin, 1992, 258-269.

Delahaye, J.-P., [1989], " Cinq classes d'idées ", *Technical Report*.

Feferman, S., [1991], " Reflecting on Incompleteness ", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 56, N 1, Mars 1991.

Gochet, P., & Gribomont, P., [1990], *Logique 1*, Paris, Hermès.

Goldblatt, R., [1984], *Topoi The Categorical Analysis of Logic*, Amsterdam, North Holland.

Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, L'Être*, trad. P.-J. Labarrière et G. Jarckyk, Paris, Aubier Montaigne, 1972.

Hegel, G.-W.-F., *Science de la logique, La logique subjective ou doctrine du Concept*, trad. P.-J. Labarrière et G. Jarckyk, Paris, Aubier Montaigne, 1981.

Heyting, A., *Intuitionism An Introduction*, Amsterdam, Norht Holland Publishing 1971.

Hindley, J.R., et Seldin, J.P., [1986], *Introduction to Combinators and* Λ*-calculus*, Cambridge, Cambridge University Press.

Husserl, E., *Expérience et jugement*, trad. Denise Souche-Dagues, Paris, PUF, 1970.

Husserl, E., *L'origine de la géométrie*, trad. J. Derrida, Paris, PUF, 1974.

Husserl, E., *Logique formelle et logique transcendantale*, trad. Suzanne Bachelard, Paris, PUF, 1957.

Husserl, E., *Recherches logiques 2*, trad. H. Elie, A. L. Kelkel et R. Schérer, Paris, PUF, 1961.

Kant, E., [1781-87], *Critique de la raison pure*, trad. Tremesaygues-Pacaud, Paris, PUF, 1971.

Kripke, S., [1982], *Wittgenstein : on rules and private langages*, Oxford : Blackwell.

Lachterman, D.R., [1989], *The Ethics of Geometry*, London, Routledge.

Lalement, R., [1990], *Logique, réduction, résolution*, Paris, Masson.

Longo, G. & Moggi, E., [1991], " Constructive natural deduction and its 'Ω-set' interpretation ", *Math. Struct. in Comp. Science*, vol. 1, p. 215-254

Salanskis, J.-M., [1995], " Platonisme et philosophie des mathématiques ", in *L'objectivité mathématique - Platonismes et structures formelles*, M. Panza et J.- M. Salanskis (Ed.), Paris, Masson, 179-212.

Salanskis, J.-M., & Sinaceur, H., Eds, [1992], *Le Labyrinthe du continu*, Paris, Editions Springer-France.

Salanskis, J.-M., [1997], " Analysis, Hermeneutics, Mathematics ", in Panza, M., & Otte, M., Eds, *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 227-241.

Salanskis, J.-M., [1999], *Le constructivisme non standard*, Lille, Presses du Septentrion.

Stiegler, B., *La technique et le temps La faute d'Épiméthée*, Paris, Galilée, 1994.

Troelstra, A.S., [1977], “ Aspects of Constructive Mathematics ”, in *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam, North-Holland, 973-1052.